Sur la dualité des topos et de leurs présentations et ses applications : une introduction

par Olivia Caramello† et Laurent Lafforgue‡

† Universitá degli Studi di Milano, Dipartimento di Matematica,
Via Cesare Saldini 50, 20133 Milano, Italie

‡ Institut des Hautes Etudes Scientifiques, Le Bois-Marie, 35 route de Chartres, 91440 Bures-sur-Yvette, France

Introduction

Ce texte a été rédigé par le second auteur (L.L.) à partir d'expositions orales et de notes succinctes du premier auteur (O.C.).

Il présente les topos de Grothendieck et leurs divers types de présentations dans la perspective des "topos comme ponts" qui est celle de O.C.

Cette perspective est exposée en tant que telle dans la partie III du texte. Le but des parties I et II est de montrer suffisamment de facettes des topos et de leurs présentations, et suffisamment d'exemples et d'illustrations, pour que l'idée d'utiliser les topos comme des ponts reliant les contenus de théories mathématiques différentes, et les principes choisis pour guider le développement de techniques permettant de mettre en œuvre cette idée, apparaissent substantiels et féconds. Ce texte actualise et complète partiellement le texte programmatique [UMT] qui proposait déjà en 2010 de développer systématiquement des techniques d'utilisation des topos comme ponts, en s'appuyant sur les premiers développements de telles techniques et les premiers exemples d'application à des domaines mathématiques classiques réalisés à l'époque. Une actualisation beaucoup plus complète et une présentation générale détaillée de la technique des topos comme ponts et de ses applications connues en 2016 sont données dans le mémoire [GTB] auquel le présent texte peut servir d'introduction, en particulier pour les géomètres à qui la logique catégorique et la théorie des topos classifiants ne sont pas familiers.

Les principes qui rendent possible et potentiellement très féconde la théorie des topos comme ponts et qui président au développement de ses techniques sont les suivants :

1) Dans presque tout domaine des mathématiques et presque toute situation, il est a priori possible de définir un ou des topos qui, selon les mots de Grothendieck, *"saisissent avec finesse l'essence"* de la situation ou au moins des parties de cette essence.

On le sait déjà pour les objets géométriques de tous types puisqu'ils définissent chacun un ou plusieurs sites et donc les topos associés que sont les catégories de faisceaux d'ensembles sur ces sites. On est habitué au rôle central que jouent en géométrie certains invariants de ces topos associés, tout particulièrement les invariants cohomologiques.

Moins universellement connue mais tout aussi remarquable et importante est la possibilité, découverte dans les années 1970 par des logiciens à partir de premiers exemples donnés dans la thèse de Monique Hakim [TASR], d'associer à toute théorie du premier ordre (au sens de la logique) qui est "géométrique", un topos bien défini à équivalence près, appelé son "topos classifiant", qui incarne le contenu mathématique de cette théorie. Le topos classifiant d'une telle théorie est caractérisé par la propriété qu'il représente le 2-foncteur contravariant qui associe à tout topos la catégorie des modèles de la théorie dans ce topos. Il convient de noter ici que la condition requise des théories d'être "géométriques du premier ordre" est extrêmement large puisqu'elle est satisfaite en particulier par toutes les théories algébriques. Le langage et les axiomes de toute théorie "géométrique du premier ordre", en particulier de toute théorie algébrique, définissent un site, appelé le site syntactique de la théorie, et le passage de ce site à son topos associé incarne géométriquement le passage de la définition logique d'une théorie à son contenu mathématique, c'est-à-dire de sa syntaxe à sa sémantique.

La présentation géométrique des topos par les sites et la présentation sémantique des topos classifiants par les théories paraissent radicalement différentes et pourtant elles définissent exactement les mêmes objets :

à équivalence près, tout topos est associé à une multitude de sites et il est en même temps le topos classifiant d'une multitude de théories.

Le présent texte cite en passant un troisième type tout aussi général de présentation des topos : celle par les "quantales" qui les rapproche cette fois non plus de la géométrie ni de la sémantique des théories mais des C^*-algèbres, donc de l'analyse et peut-être de la mécanique quantique.

Le caractère extraordinairement général, multi-forme et souple des divers types de présentations des topos implique que, dans toute situation mathématique dont on cherche à exprimer "l'essence" au moyen d'un ou de plusieurs topos, la définition même de "bons" topos propres à exprimer tout ou partie de cette essence, donc la définition de "bons" sites ou de "bonnes théories" données par de "bons" axiomes dans un "bon" langage, sont un aspect particulièrement crucial, subtil et délicat de l'utilisation des topos.

2) Un second principe est que la dualité entre les topos et leurs présentations par des sites, théories ou autres est encore plus importante que les topos considérés en eux-mêmes.

Tous les topos partagent avec le plus élémentaire d'entre eux, la catégorie des ensembles, des propriétés absolument remarquables (existence de limites et de colimites arbitraires, existence des exponentielles, existence d'un classificateur des sous-objets découverte par Lawvere, opérations de Heyting internes à ce classificateur, possibilité de parler de la "logique interne" d'un topos définie par les propriétés de ces opérations de Heyting) qui rendent possible de réaliser à l'intérieur de n'importe quel topos à peu près toutes les constructions, manipulations et calculs que l'on a l'habitude de réaliser dans le cadre ensembliste.

Mais la rançon de cette richesse et de cette souplesse opératives et calculatoires est que les topos sont des catégories beaucoup trop grosses pour pouvoir être décrites et saisies directement. C'est ainsi que, pour commencer, leurs objets ne forment jamais un ensemble (sauf pour le topos trivial).

Les topos sont donc toujours donnés concrètement de manière indirecte par des sites de Grothendieck, par des théories du premier ordre qu'ils classifient ou éventuellement par d'autres présentations. Et c'est bien par de telles présentations qu'ils sont associés et donc reliés à des contenus mathématiques concrets : géométriques dans le cas de sites, sémantiques dans le cas de théories.

3) Un troisième principe est qu'il faut considérer les topos à équivalence (de catégories) près et que l'ambiguïté essentielle de la théorie des présentations des topos – qui consiste en ce que n'importe quel topos est associé à une infinité de sites différents ainsi qu'à une infinité de théories différentes – est non pas un problème mais une structure fondamentale qui oriente la théorie des topos, de même que l'on sait depuis Galois que l'ambiguïté essentielle de la théorie des équations algébriques – qui consiste en ce que les racines d'un polynôme irréductible sont algébriquement indistinguables – est non pas un problème mais une structure fondamentale qui livre la clef de cette théorie.

Le fait que deux sites ont des topos associés équivalents signifie qu'ils ont même contenu géométrique. Le fait que deux théories géométriques du premier ordre sont "équivalentes au sens de Morita" c'est-à-dire ont des topos classifiants équivalents, signifie qu'elles ont même contenu sémantique. Le fait que le topos associé à un site soit équivalent au topos classifiant d'une théorie signifie que le contenu géométrique de ce site est équivalent au contenu sémantique de cette théorie.

L'ambiguïté des présentations des topos n'est pas seulement un fait théorique mais aussi un fait pratique et opératoire. En effet, plusieurs résultats très généraux et assez simples – comme le "lemme de comparaison" de Grothendieck – permettent d'élaborer dynamiquement à partir d'une seule présentation d'un topos par un site ou une théorie une infinité d'autres présentations de ce topos par des sites ou des théories.

Un type plus sophistiqué et plus particulier mais très important d'équivalence de topos est fourni par la théorie de Galois généralisée par Grothendieck avec la théorie des catégories galoisiennes de [SGA1] et généralisée encore dans l'article [TGT]. Cette théorie et ses généralisations consistent en effet à montrer que des classes de plus en plus larges de topos définis concrètement sont équivalentes à des "topos classifiants" BG de groupes topologiques prodiscrets G, constitués des ensembles discrets munis d'une action continue de G.

La considération des types très particuliers de topos que sont les "topos galoisiens", équivalents aux topos classifiants BG de groupes discrets ou prodiscrets G, fait réaliser que la notion de topos représente aussi une énorme généralisation et un approfondissement de la notion de groupe. Notons d'ailleurs que pour tout anneau R, la catégorie des objets abéliens R-linéaires de BG, qui est un invariant très naturel de ce topos, n'est autre que la catégorie des représentations R-linéaires de G, certainement l'outil le plus étudié et le plus puissant de la théorie des groupes.

On peut même dire que la notion de topos parfait la notion de groupe : dans les questions mathématiques concrètes, les groupes ne sont pas étudiés pour eux-mêmes mais pour leurs actions, c'est-à-dire pour leur topos classifiant. La distinction mérite d'être faite car, s'il est vrai que deux groupes discrets sont nécessairement isomorphes quand leurs topos classifiants sont équivalents, cette implication n'est plus vraie en général dans le cas de groupes topologiques prodiscrets.

Ainsi, la notion de topos peut être vue comme une généralisation de la notion de groupe assez vaste pour embrasser les espaces topologiques mais aussi du même coup tous les types d'espaces étudiés en géométrie ainsi que toute la sémantique des théories géométriques du premier ordre, en particulier toute la sémantique algébrique.

Il est fascinant de songer que, par sa définition des topos associés à des sites, Grothendieck a pu réaliser une généralisation aussi vaste en conservant l'essentiel du réseau des intuitions géométriques.

Notre conviction est que la théorie des topos et de leurs présentations, avec son ambiguïté essentielle et structurelle, est appelée à produire sur les mathématiques un impact comparable à celui qu'a produit la théorie des groupes à partir du moment où, quelques décennies après sa découverte par Galois, elle a commencé à être comprise par la communauté mathématique.

4) Le quatrième principe, qui est une conséquence naturelle des deux précédents, consiste à penser qu'il convient d'utiliser les topos et la dualité entre sites et topos en considérant des invariants des topos et en exprimant ou calculant ces invariants en termes de divers types de présentations de ces topos.

On entend ici par "invariants" des objets, des propriétés ou des constructions associés aux topos et qui sont invariants par équivalence de topos.

Décoder ou calculer un tel invariant signifie l'exprimer dans les termes concrets d'un site ou d'une théorie de présentation en faisant disparaître toute référence au topos par rapport auquel il a d'abord été défini.

Ce quatrième principe est confirmé et consolidé par l'expérience que, dans la pratique, l'expression ou le calcul d'invariants des topos en termes de présentations de ces topos est le plus souvent faisable mais techniquement difficile, profond et riche en surprises.

Avec la définition dans une situation mathématique donnée de "bons topos" par de "bons sites" ou de "bonnes théories", c'est la partie la plus subtile et la plus créative de la théorie des topos.

L'expérience autorise même à dire que le calcul ou l'expression des invariants en termes de sites ou de théories fait des topos des êtres mathématiques eux-mêmes créateurs au sens qu'ils engendrent des résultats concrets ou amènent à introduire de nouvelles notions qui se formulent indépendamment d'eux mais qu'il aurait été impossible d'imaginer ou de concevoir sans eux.

C'est ainsi que, souvent, deux sites ou théories mis en relation par une équivalence de leurs topos associés apparemment assez anodine, voient un même invariant de leur topos commun s'exprimer en des termes totalement différents chez l'un et chez l'autre, si bien que se trouvent mises en équivalence deux propriétés ou deux constructions que l'on n'aurait jamais imaginé de rapprocher sans ce calcul de descente du monde "imaginaire" des topos vers le monde "réel" des mathématiques concrètes s'incarnant en des sites ou des définitions de théories.

Tout topos est voué par sa taille et par la richesse et la complexité de sa structure catégorique à rester à jamais insaisissable et invisible en sa quasi-totalité. Mais le choix d'invariants de topos et leur calcul dans les termes de sites ou de théories de présentation permettent d'extraire de la richesse infinie mais inaccessible des topos et d'amener au jour des informations en quantité finie que l'on cherche à rendre les plus intéressantes et les plus pertinentes possibles.

Les invariants les plus classiques et les plus étudiés, y compris par Grothendieck lui-même, des topos associés à des objets géométriques sont évidemment les invariants cohomologiques et homotopiques. Un exemple classique particulièrement frappant, important, profond et riche de conséquence, de calcul d'invariants cohomologiques en termes de sites de présentation, est la formule des points fixes de Grothendieck-Lefschetz. L'histoire de ces invariants et de cette formule n'est d'ailleurs certainement pas achevée : nous faisons remarquer dans le texte (après le théorème II.14 du §II.2) que leur généralisation à des topos étales définis par certains foncteurs non représentables expliquerait la forme des fameuses formules de comptage de Drinfeld des représentations ℓ-adiques irréductibles.

Un autre invariant géométrique, tellement simple qu'il paraît trivial, consiste en la catégorie des points d'un topos, considérée à équivalence près, ou plus grossièrement l'ensemble des classes d'isomorphie de ces points. Mais l'apparence de trivialité est une illusion : le topos d'un espace topologique a en général d'autres points que ceux de l'espace et nous citons par ailleurs un récent théorème de Connes et Consani qui montre qu'un topos apparemment très simple, leur "topos des fréquences", a un ensemble associé de points très subtil et intéressant.

Un troisième et dernier exemple d'objet invariant est l'ensemble ordonné des sous-topos d'un topos. Son expression en termes d'un site de présentation ou d'une théorie de présentation est remarquable et intéressante.

Nous donnons également cinq exemples de propriétés invariantes des topos peu familières aux géomètres mais très intéressantes d'autres points de vue. Ce sont l'atomicité et la bivalence (les deux propriétés les plus importantes des topos galoisiens), la propriété de Boole (qui correspond à la loi du tiers exclu en logique), la propriété de De Morgan (qui est une forme affaiblie de cette loi) et enfin la propriété d'être "de type préfaisceau", particulièrement importante puisque toute présentation d'un topos par un site fait de lui un sous-topos du topos des préfaisceaux sur la catégorie sous-jacente au site. Nous donnons divers exemples de caractérisations de ces propriétés invariantes en termes de sites ou de théories de présentation.

Nous donnons enfin deux exemples de constructions invariantes, consistant à associer à tout topos deux sous-topos caractérisés par certaines propriétés, sa "Booléanisation" et sa "Demorganisation".

Il existe évidemment beaucoup d'autres exemples et on peut en concevoir sans limite puisque les topos ont une infinité d'invariants.

La définition de "bons" topos, le choix de "bons" invariants et le calcul ou l'expression de ces invariants en termes des sites ou théories de définition sont les trois parties les plus essentielles de la mise en œuvre de la théorie des "topos comme ponts" telle qu'elle est exposée dans la partie III.

Nous proposons de compléter cette introduction en citant quelques considérations particulièrement frappantes de Grothendieck au sujet des topos.

Il avait bien sûr préparé, ou inspiré et dirigé, les textes fondamentaux de SGA4 qui ont introduit les topos en mathématiques et jeté les bases de leur théorie.

Mais il a également exprimé plus tard, dans *"Récoltes et Semailles"* ([RS]), un certain nombre de considérations générales extrêmement intéressantes sur les topos. Il est passionnant et très instructif de rechercher systématiquement et de lire tous les passages de [RS] où Grothendieck parle des topos, en particulier les paragraphes 13 à 16 de la partie introductive *"Présentation des thèmes, ou Prélude en quatre mouvements"*.

Dans les notes 24 et 25 du paragraphe 8 de cette partie Grothendieck cite le thème des topos comme l'un des 12 *"maître-thèmes"* de son œuvre de mathématicien et commente :

> *"Parmi ces thèmes, le plus* vaste *par sa* portée *me paraît être celui des topos, qui fournit l'idée d'une synthèse de la géométrie algébrique, de la topologie et de l'arithmétique. Le plus vaste par l'*étendue des développements *auxquels il a donné lieu dès à présent, est le thème des* schémas*."*

Au paragraphe 16, il exprime l'idée que la notion de topos permet de saisir avec finesse l'essence d'une situation, et ce dans les domaines les plus divers des mathématiques, si bien que ces domaines se trouvent rapprochés et en partie unifiés en profondeur par la traduction commune en termes de topos des situations auxquelles ils donnent lieu :

> *"C'est le thème du topos, et non celui des schémas, qui est ce "lit", ou cette "rivière profonde", où viennent s'épouser la géométrie et l'algèbre, la topologie et l'arithmétique, la logique mathématique et la théorie des catégories, le monde du continu et celui des structures "discontinues" ou "discrètes". Si le thème des schémas est comme le* cœur *de la géométrie nouvelle, le thème du topos en est l'enveloppe, ou la* demeure*. Il est ce que j'ai conçu de plus vaste, pour saisir avec finesse, par un même langage riche en résonances géométriques, une "essence" commune à des situations des plus éloignées les unes des autres, provenant de telle région ou de telle autre du vaste univers des choses mathématiques."*

Remarquons au passage que Grothendieck parle en particulier des *"épousailles de la logique mathématique et de la théorie des catégories"*, effectivement réalisées par l'existence des topos classifiants des théories géométriques du premier ordre. Nous ne savons si, au moment où il écrivait *"Récoltes et Semailles"* , Grothendieck avait connaissance de ce théorème d'existence démontré presque 10 ans plus tôt par des logiciens s'inspirant de la thèse de son élève Monique Hakim, ou bien s'il avait l'intuition d'un tel théorème se formulant dans son esprit dans un langage différent de celui de la logique du premier ordre que sans doute il ignorait. Beaucoup plus loin dans le texte de [RS] il écrit en tout cas :

> *"Comme autres exemples remarquables de topos qui ne sont pas des espaces ordinaires, et pour lesquels il ne semble pas y avoir non plus de substitut satisfaisant en termes des notions "admises", je signalerai : (...), les topos "classifiants" pour à peu près n'importe quelle espèce de structure mathématique (tout au moins celles "s'exprimant en termes de limites projectives finies et de limites inductives quelconques")."* (Deuxième partie, I, note 46(6).)

Les "limites projectives finies" et les "limites inductives quelconques", traduites dans le langage de la logique du premier ordre, deviennent les conjonctions finitaires $\wedge$ et les disjonctions infinitaires $\bigvee$ qui sont, avec les quantificateurs existentiels $\exists$, les connecteurs logiques autorisés dans le "fragment géométrique" de la logique du premier ordre qui est le cadre d'existence des "topos classifiants" des théories.

Pourtant, la suite de la citation montre que Grothendieck ne pense pas ici à la logique du premier ordre mais à la classification de variétés qui ne sont pas des objets du premier ordre :

> *"Quand on prend une structure de "variété" (topologique, différentiable, analytique réelle ou complexe, de Nash,* etc... *ou même schématique lisse sur une base donnée) on trouve dans chaque cas un topos particulièrement alléchant, qui mérite le nom de "variété universelle" (de l'espèce envisagée). Ses invariants homotopiques (et notamment sa cohomologie, qui mérite le nom de "cohomologie classifiante" pour l'espèce de variété envisagée) devraient être étudiés et connus depuis longtemps* (...)*"*

Grothendieck n'est pas ici en train d'affirmer que chaque telle structure de variété définit sur la 2-catégorie des topos un 2-foncteur qui serait représentable. Les topos auxquels il pense sont ceux associés aux sites suivants : les objets sont les variétés de l'espèce envisagée ou toute famille séparante de telles variétés (par exemple les ouverts affines), les flèches sont les automorphismes d'une telle variété sur un ouvert admissible d'une autre variété, les recouvrements sont induits par la topologie des variétés. Ainsi, les variétés apparaissent comme des objets et non des points d'un tel topos (voir la proposition II.4 du paragraphe II.1).

Revenant à la citation principale faite plus haut, observons que l'affirmation de Grothendieck que les topos permettent de *"saisir avec finesse* (...) *une "essence" commune à des situations des plus éloignées les unes des autres, provenant de telle région ou de telle autre du vaste univers des choses mathématiques"* exprime l'idée même d'équivalence de Morita et donc la possibilité de ponts entre théories différentes, voire très éloignées, réalisés par les topos. En revanche, et bien qu'il ait beaucoup étudié dans ses travaux des invariants particuliers (principalement cohomologiques) et donné un rôle central à l'expression de tel ou tel invariant en termes de sites de définition (comme avec le théorème des points fixes), Grothendieck n'a apparemment pas de considérations générales sur les invariants des topos ni sur l'expression de ces invariants en termes des sites de présentation.

Dans d'autres passages saisissants du *"Prélude"* de [RS], Grothendieck exprime en termes simples pourquoi la notion de topos est à ses yeux tellement profonde et importante.

La première raison pour cela est que l'idée de topos fait passer d'un monde à un autre, en exprimant la notion géométrique d'espace en termes d'une autre notion totalement différente, celle de catégorie :

> *"Comme si souvent en mathématique, nous avons réussi ici (grâce à l'idée cruciale de "faisceau", ou de "mètre cohomologique") à exprimer une certaine notion (celle d'"espace" en l'occurrence) en termes d'une autre (celle de "catégorie"). À chaque fois, la découverte d'une telle traduction d'une notion (exprimant un certain type de situations) en termes d'une autre (correspondant à un autre type de situations), enrichit notre compréhension et de l'une et de l'autre notion, par la confluence inattendue des intuitions spécifiques qui se rapportent soit à l'une, soit à l'autre. Ainsi, une situation de nature "topologique" (incarnée par un espace donné) se trouve ici traduite par une situation de nature "algébrique" (incarnée par une "catégorie") ; ou, si on veut, le "continu" incarné par l'espace, se trouve "traduit" ou "exprimé" par la structure de catégorie, de nature "algébrique" (et jusque-là perçue comme étant de nature essentiellement "discontinue" ou "discrète")."* ([RS], Prélude, §13.)

Remarquons que Grothendieck met ici l'accent sur le fait même de la traduction – en l'occurrence sur la réalisation d'un passage du monde géométrique au monde catégorique – ce qui revient à accorder encore plus d'importance aux présentations des topos par des sites qu'aux topos considérés en eux-mêmes comme des catégories d'un type particulier.

Continuant d'explorer la relation du monde géométrique des espaces (ou plus généralement des sites) et du monde correspondant des topos, il observe que le premier ne paraît pas pouvoir être étendu alors que le second est plongé par définition dans un monde encore beaucoup plus vaste, celui des catégories, au sein duquel il est caractérisé par les propriétés structurelles exceptionnelles que les topos partagent avec la catégorie des ensembles :

> *"La première de ces notions, celle d'espace, nous était apparue comme une notion en quelque sorte "maximale" – une notion si générale déjà, qu'on imagine mal comment en trouver encore une extension qui reste "raisonnable". Par contre, il se trouve que de l'autre côté du miroir, ces "catégories" (ou "arsenaux") sur lesquels on tombe, en partant d'espaces topologiques, sont de nature très particulière. Elles jouissent en effet d'un ensemble de propriétés fortement typées, qui les font s'apparenter à des sortes de "pastiches" de la plus simple imaginable d'entre elles – celle qu'on obtient en partant d'un espace réduit à un seul point."*

Une seconde raison de la profondeur et de l'importance des topos est donnée au paragraphe suivant (§14) du *"Prélude"* de [RS]. C'est que la notion de topos est à la fois "pas trop vaste" (comme l'illustre d'ailleurs, du côté catégorique, le caractère très particulier des topos) et "assez vaste" (comme l'illustre, du côté géométrique, le caractère de généralité "maximale" de la notion de site) :

> *"La notion (...) de topos constitue une extension insoupçonnée, pour mieux dire,* une métamorphose de la notion d'espace. *Par là, elle porte la promesse d'un renouvellement semblable de la topologie, et au-delà de celle-ci, de la géométrie (...), elle possède les deux caractères complémentaires essentiels pour toute généralisation fertile, que voici.*
>
> Primo, *la nouvelle notion n'est* pas trop vaste, *en ce sens que dans les nouveaux "espaces" (...) les intuitions et les constructions "géométriques" les plus essentielles, familières pour les bons vieux espaces d'antan, peuvent se transposer de façon plus ou moins évidente. Autrement dit, on dispose pour les nouveaux objets de toute la riche gamme des images et associations mentales,*

> *des notions et de certaines au moins des techniques, qui précédemment restaient restreintes aux objets ancien style.*
>
> *Et* secundo*, la nouvelle notion est en même temps* assez vaste *pour englober une foule de situations qui, jusque-là, n'étaient pas considérées comme donnant lieu à des intuitions de nature "topologico-géométrique" – aux intuitions, justement, qu'on avait réservées par le passé aux seuls espaces topologiques ordinaires (...)."*

S'il est vrai que les "intuitions et les constructions géométriques les plus essentielles" se transposent à tous les topos, elles peuvent se retranscrire en termes de leurs divers types de présentations, y compris non géométriques comme les présentations logiques, et s'appliquer par exemple à des théories mathématiques comme si elles étaient des objets géométriques. L'illustration la plus simple en est la notion de point d'un topos qui devient celle de modèle d'une théorie.

Mais puisque tous les topos sont aussi présentables comme des topos classifiants de théories et que d'autre part chacun a une logique interne définie par les propriétés de son classificateur des sous-objets, les intuitions et constructions logiques les plus essentielles se transposent aux topos et se retranscrivent en termes de leurs divers types de présentations, y compris leurs présentations géométriques par des sites. Ainsi en va-t-il par exemple de la propriété de bivalence (qui correspond à la complétude des théories du premier ordre au sens géométrique), de la propriété de Boole (qui correspond à la loi du tiers exclu) et de la propriété de De Morgan (qui correspond à une forme affaiblie de cette loi).

Enfin, des notions propres aux topos et à leur structure catégorique, comme la notion de sous-topos d'un topos, la propriété d'atomicité, l'équivalence à un topos de préfaisceaux ou les procédés de construction de sous-topos par Booléanisation ou Demorganisation, peuvent être traduites en termes de sites ou de théories de présentation.

Ainsi, l'atomicité combinée avec la bivalence implique la complétude des théories au sens du premier ordre, qui est une propriété logique extrêmement intéressante et importante : elle signifie que toute formule du premier ordre sans variable libre est ou bien démontrablement vraie ou bien démontrablement fausse dans la théorie, donc ou bien vérifiée dans tous les modèles ou bien dans aucun. On dispose de peu de moyens en logique pure pour montrer qu'une théorie est complète. En revanche, on dispose de davantage de moyens géométriques de montrer qu'un topos est atomique bivalent. En particulier, tout topos galoisien est atomique bivalent et donc toute théorie classifiée par un tel topos est complète. A titre d'illustration de l'usage possible de topos atomiques à deux valeurs, nous présentons au paragraphe III.3 une approche des problèmes "d'indépendance de ℓ" des foncteurs de cohomologie ℓ-adique tirée de l'article programmatique [MT].

Enfin, la notion de topos de préfaisceaux définit la classe des théories de type préfaisceau, qui comprend toutes les théories algébriques mais aussi d'autres théories non algébriques qui possèdent des propriétés analogues à celles des théories algébriques. La classe des théories de type préfaisceau est particulièrement importante puisque, comme tout topos s'écrit comme sous-topos de topos de préfaisceaux, toute théorie géométrique du premier ordre s'écrit comme quotient de théories de type préfaisceau, c'est-à-dire s'écrit dans le langage de telles théories en conservant leurs axiomes et en ajoutant d'autres. La dynamique des topos conduit donc à commencer l'étude systématique des théories géométriques du premier ordre et des relations de leurs contenus sémantiques par une étude préalable des théories de type préfaisceau. On renvoie au livre [TST] pour une telle étude.

C'est un plaisir pour nous de remercier Cécile Gourgues qui a réalisé avec sa gentillesse et sa disponibilité coutumières la frappe entière du manuscrit.

Terminons par un conseil de lecture : ce texte d'introduction aux multiples facettes des topos et à la théorie des "topos comme ponts" peut être lu de manière non linéaire en s'orientant grâce au sommaire détaillé qui suit. On peut aussi consulter sur les sites des auteurs les notes d'exposé [TGR] qui sont plus succinctes et plus légères.

Sommaire

I. Symétries et invariants

0 La notion d'invariant des topos

On suppose connues les notions de catégorie, de foncteur, de limite (ou limite projective), de colimite (ou limite inductive), de foncteur adjoint et d'équivalence de catégories.

Les topos sont un type particulier de catégories, tel que toute catégorie équivalente à un topos soit encore un topos.

Dans le cadre des topos, la notion appropriée de symétrie est celle d'équivalence de catégories si bien que l'adjectif "invariant" désigne tout objet, propriété ou procédé de construction qu'il est possible de définir sur les topos et qui est invariant par équivalence de catégories.

Comme nous allons le voir, les notions de topos puis de symétries et d'invariants des topos sont extrêmement générales et multi-formes. En particulier, il existe une infinité d'invariants des topos.

Commençons par donner une définition des topos et des morphismes géométriques de topos :

Définition I.1. (A. Grothendieck, [SGA4] exposé IV.) –

(i) *Un topos est une catégorie qui est équivalente à la catégorie des faisceaux d'ensembles $\mathcal{E}_{\mathcal{C},J}$ sur un "site" $(\mathcal{C},J)$ constitué d'une catégorie (essentiellement petite) $\mathcal{C}$ munie d'une topologie J, c'est-à-dire d'une notion de "cribles couvrants" des objets de $\mathcal{C}$. (On verra au paragraphe* II.1 *ce que cela signifie.)*

(ii) *Un morphisme (géométrique) de topos*

$$f : \mathcal{E}_1 \longrightarrow \mathcal{E}_2$$

est une paire de foncteurs adjoints

$$\begin{array}{ll} & f_* : \mathcal{E}_1 \longrightarrow \mathcal{E}_2 \quad \textit{(appelé image directe)} \\ \textit{et} & \\ & f^* : \mathcal{E}_2 \longrightarrow \mathcal{E}_1 \quad \textit{(appelé image réciproque)} \end{array}$$

telle que

- *le foncteur f_* est adjoint à droite de f^*,*
- *le foncteur f^* est exact c'est-à-dire respecte les limites finies (en plus de respecter les colimites arbitraires puisque c'est un adjoint à gauche).*

Remarques :

(i) Les topos forment une 2-catégorie dont les 1-morphismes sont les morphismes géométriques de topos et les 2-morphismes sont les transformations naturelles de tels morphismes. En particulier, pour tous topos $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$, les morphismes géométriques $\mathcal{E}_1 \to \mathcal{E}_2$ forment une catégorie notée $\mathcal{H}om\,(\mathcal{E}_1,\mathcal{E}_2)$. Si $\mathcal{E}_1$ ou $\mathcal{E}_2$ est remplacé par un topos équivalent, alors la catégorie $\mathcal{H}om\,(\mathcal{E}_1,\mathcal{E}_2)$ est remplacée par une catégorie équivalente.

(ii) Pour toute catégorie (essentiellement petite) $\mathcal{C}$, la catégorie $\widehat{\mathcal{E}}_{\mathcal{C}}$ des préfaisceaux sur $\mathcal{C}$, c'est-à-dire des foncteurs contravariants

$$\mathcal{C}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathrm{Ens}$$

vers la catégorie des ensembles Ens est un topos : c'est la catégorie des faisceaux sur $\mathcal{C}$ pour la topologie "triviale" pour laquelle le seul crible couvrant de tout objet a de $\mathcal{C}$ est celui de tous les morphismes $b \to a$.

Pour tout site $(\mathcal{C}, J)$, on a un morphisme canonique

$$f = (f^*, f_*) : \mathcal{E}_{\mathcal{C},J} \longrightarrow \mathcal{E}_{\mathcal{C}}.$$

Sa composante d'image directe f_* consiste à voir tout faisceau comme un préfaisceau ; elle identifie $\mathcal{E}_{\mathcal{C},J}$ à une sous-catégorie pleine de $\mathcal{E}_{\mathcal{C}}$. Sa composante d'image réciproque f^* est le foncteur de faisceautisation des préfaisceaux ; elle identifie $\mathcal{E}_{\mathcal{C},J}$ à une catégorie quotient de $\mathcal{E}_{\mathcal{C}}$. □

Donnons quelques premiers exemples de topos :

Exemples I.2. –

(i) *La catégorie* Ens *des ensembles est un topos. En effet, elle est la catégorie des préfaisceaux sur la catégorie constituée d'un unique objet muni de son automorphisme* Id.

(ii) *La catégorie des ensembles simpliciaux est un topos. En effet, elle est la catégorie des préfaisceaux sur la "catégorie simpliciale" dont les objets sont les intervalles finis* $\{0, 1, \dots, n\}$, $n \in \mathbb{N}$, *et les morphismes sont les applications croissantes* $\{0, 1, \dots, n\} \to \{0, 1, \dots, m\}$.

(iii) *Pour tout groupe G, la catégorie BG des ensembles munis d'une action de G est un topos appelé le classifiant de G. En effet, elle est la catégorie des préfaisceaux sur la catégorie constituée d'un unique objet muni du groupe G d'automorphismes.*

(iv) *Plus généralement, soit G un groupe topologique prodiscret au sens qu'une base de voisinages ouverts de l'unité est constituée de sous-groupes (pas nécessairement distingués). Alors la catégorie BG des ensembles discrets munis d'une action continue de G est un topos appelé le classifiant de G.*

(v) *Plus généralement encore, un espace topologique X muni de l'action continue (à droite) d'un groupe topologique G définit un topos $\mathcal{E}_{X/G}$ comme la catégorie des faisceaux sur le site suivant :*

- *les objets du site sont les ouverts U de l'espace produit $X \times G$,*
- *faisant agir le groupe produit $G \times G$ sur $X \times G$ par*

$$(x, h) \cdot (g, g') = (x \cdot g, g^{-1} \cdot h \cdot g'),$$

les morphismes $U \to V$ du site sont les éléments $(g, g') \in G \times G$ tels que

$$U \cdot (g, g') \subseteq V,$$

- *une famille de morphismes $U_i \xrightarrow{(g_i, g'_i)} V$ est couvrante si et seulement si*

$$V = \bigcup_i U_i \cdot (g_i, g'_i).$$

□

1 Exemple d'invariant : la catégorie des points d'un topos

Nous allons donner quelques exemples d'invariants des topos.

Tout d'abord, si $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$ sont deux topos, la catégorie

$$\mathcal{H}om\,(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2),$$

considérée à équivalence près, peut être vue comme un invariant de $\mathcal{E}_1$ (si $\mathcal{E}_2$ est fixé) ou de $\mathcal{E}_2$ (si $\mathcal{E}_1$ est fixé).

En particulier, pour tout topos $\mathcal{E}$, on peut considérer l'invariant de $\mathcal{E}$ constitué de la catégorie des morphismes

$$\mathcal{E} \longrightarrow \mathrm{Ens} \qquad \text{ou} \qquad \mathrm{Ens} \longrightarrow \mathcal{E}.$$

La première de ces deux catégories est toujours réduite à un objet car on a :

Proposition I.3. ([SGA4] exposé IV, §4.3.) –

Pour tout topos $\mathcal{E}$, il existe un unique morphisme

$$\mathcal{E} \longrightarrow \mathrm{Ens}.$$

Remarque :

Si $\mathcal{E} = \mathcal{E}_{\mathcal{C},J}$ est le topos des faisceaux sur un site $(\mathcal{C}, J)$, le foncteur d'image directe $\mathcal{E} \to \mathrm{Ens}$ associe à tout faisceau sur $(\mathcal{C}, J)$ l'ensemble de ses sections globales tandis que les images des ensembles par le foncteur d'image réciproque $\mathrm{Ens} \to \mathcal{E}$ sont les faisceaux constants sur $(\mathcal{C}, J)$ ou objets constants de $\mathcal{E}$.

En particulier, si $\mathcal{E} = BG$ est le classifiant d'un groupe (topologique prodiscret) G, le foncteur d'image directe associe à tout ensemble muni d'une action continue de G le sous-ensemble de ses points fixes tandis que le foncteur d'image réciproque associe à tout ensemble lui-même muni de l'action triviale de G. □

L'invariant des topos $\mathcal{E}$ défini comme

$$\mathcal{H}om\,(\mathrm{Ens}, \mathcal{E})$$

est beaucoup plus riche et porte d'ailleurs un nom spécial :

Définition I.4. ([SGA4] exposé IV, §6.) –

Un point d'un topos $\mathcal{E}$ est un morphisme

$$\mathrm{Ens} \longrightarrow \mathcal{E}.$$

Les points de $\mathcal{E}$ forment une catégorie notée $\mathrm{pt}\,(\mathcal{E})$.

Remarques :

(i) Le nom de "point" vient de ce que si $\mathcal{E} = \mathcal{E}_X$ est le topos des faisceaux sur un espace topologique X, alors tout élément $x \in X$ définit un morphisme

$$x = (x^*, x_*) : \mathrm{Ens} \longrightarrow \mathcal{E}_X$$

dont la composante d'image réciproque x^* associe à tout faisceau sur X sa "fibre" au point x.

De plus, deux tels points $x_1, x_2 \in X$ sont reliés par un morphisme (nécessairement unique) $x_1 \to x_2$ si et seulement si $x_2 \in \bar{x}_1$.

En général, le topos $\mathcal{E} = \mathcal{E}_X$ a des points qui ne proviennent pas de points $x \in X$, ce qui signifie que la catégorie $\mathrm{pt}\,(\mathcal{E}_X)$ a de meilleures propriétés d'invariance que l'ensemble des éléments de X.

Cependant, pour tout schéma X muni de la topologie de Zariski, les points du topos $\mathcal{E}_X$ correspondent exactement à ceux du schéma X.

(ii) En règle générale, un topos $\mathcal{E}$ n'est pas caractérisé (à équivalence près) par la catégorie $\mathrm{pt}\,(\mathcal{E})$ de ses points. Il existe même des topos très riches qui n'ont aucun point. □

Voici un premier exemple de détermination des points d'un topos :

Proposition I.5. (Voir [SGL], chapitre VIII, §7 et §8.) –

(i) *Les points du topos des ensembles simpliciaux correspondent aux "intervalles" c'est-à-dire aux ensembles totalement ordonnés qui admettent un minimum et un maximum.*

Les morphismes entre ces points sont les applications croissantes entre intervalles.

(ii) *Le point qui correspond à l'intervalle réel* $[0,1]$ *n'est autre que le foncteur de réalisation géométrique des emsembles simpliciaux.*

Remarque :

La partie (ii) de la proposition entraîne le résultat non trivial que le foncteur de réalisation géométrique des ensembles simpliciaux est exact. □

S'agissant des topos classifiants des groupes discrets, on a :

Proposition I.6. ([SGA4] exposé IV, §7.2.) –

Soit G *un groupe discret. Alors :*

(i) *La catégorie des points du topos classifiant* BG *de* G *s'identifie à celle des* G*-torseurs, c'est-à-dire des ensembles munis d'une action simplement transitive de* G*.*

Elle est équivalente à la catégorie réduite à l'unique objet défini par le G*-torseur* G *et le groupe* G *de ses automorphismes.*

(ii) *Le point associé au* G*-torseur* G *est le foncteur d'oubli de l'action de* G *sur les ensembles munis d'une telle action.* □

En revanche, la situation devient beaucoup plus complexe pour les groupes G munis d'une topologie (prodiscrète) non triviale. Voici un exemple, le topos de Schanuel :

Exemple I.7. (Voir plus loin l'exemple (iv) qui suit le théorème II.23 du §II.2.) –

Considérons, pour tout ensemble infini I*, le groupe* $\mathrm{Aut}(I)$ *des bijections de* I *muni de la topologie (prodiscrète) dont une base de voisinages ouverts de l'unité est fournie par les fixateurs des familles finies d'éléments de* I*.*

Alors :

(i) *Tous les topos classifiants* $B\,\mathrm{Aut}(I)$ *des groupes prodiscrets* $\mathrm{Aut}(I)$ *sont équivalents à un unique topos appelé le topos de Schanuel.*

(ii) *La catégorie des points de ce topos s'identifie à celle des ensembles infinis* I *et des applications injectives entre eux. En particulier, les points de ce topos ne sont pas tous isomorphes et leurs groupes d'automorphismes ne sont pas isomorphes.* □

Cet exemple paraît montrer que le topos classifiant d'un groupe a de meilleures propriétés d'invariance que le groupe lui-même. Effectivement, on est en général intéressé davantage par les actions de groupes que par les groupes.

Voici un exemple bien plus sophistiqué de calcul de l'ensemble des classes d'isomorphie de points d'un topos :

Théorème I.8. (A. Connes et C. Consani, [GSS].) –

Considérons le "site des fréquences" $(\mathcal{C}, J)$ *défini comme suit :*

$$\begin{cases} \bullet & \textit{Les objets de } \mathcal{C} \textit{ sont les intervalles ouverts bornés } \Omega \textit{ de la demi-droite réelle } [0,+\infty), \textit{ y compris ceux de la forme } [0,a),\ a>0. \\ \bullet & \textit{Les morphismes } \Omega \to \Omega' \textit{ de } \mathcal{C} \textit{ sont les entiers } n \geq 1 \textit{ tels que } \\ & \qquad n\cdot\Omega \subset \Omega'. \\ \bullet & \textit{Un crible d'un objet } \Omega \textit{ est couvrant s'il contient une sous-famille d'inclusions } \Omega_i \xrightarrow{1} \Omega \textit{ telle que } \bigcup_i \Omega_i = \Omega. \end{cases}$$

Alors l'ensemble des classes d'isomorphie de points du topos $\mathcal{E}_{\mathcal{C},J}$ s'identifie au quotient automorphe

$$\mathbb{Q}^\times \backslash \mathbb{A}_\mathbb{Q} / \hat{\mathbb{Z}}^\times .$$

Remarque :

Avant le "site des fréquences", A. Connes et C. Consani ont défini et étudié dans les articles [AS] et [GAS] le "site arithmétique" constitué de la catégorie sans topologie qui a un unique objet et pour ensemble des endomorphismes de cet objet le monoïde multiplicatif des entiers $n \geq 1$.

L'article [CT] donne (au §4, théorème 4) une interprétation du topos du "site arithmétique" comme topos classifiant (au sens des théorèmes I.9. et II.7 ci-dessous) d'une certaine théorie $\mathbb{T}$ si bien que la catégorie des points de ce topos est équivalente à celle des modèles ensemblistes de $\mathbb{T}$.

□

On voit déjà que calculer la catégorie des points d'un topos ou même simplement l'ensemble des classes d'isomorphie des points est souvent une question délicate.

Il est plus délicat encore d'interpréter un ensemble donné comme ensemble des classes d'isomorphie des points d'un topos le plus naturel possible. Cela revient à mettre au jour derrière un tel ensemble une structure incomparablement plus riche qui sera souvent présentée en des termes totalement différents.

On dispose cependant d'un procédé général qui permet d'interpréter une large classe de catégories comme des catégories de points d'un topos :

Théorème I.9. (M. Makkai et G. Reyes, [FOCL] ; voir aussi le §7.2 de [TTB].) –

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie qui est la catégorie $\mathbb{T}$-mod (Ens) des modèles ensemblistes d'une théorie "géométrique" du premier ordre (au sens de la logique) $\mathbb{T}$, c'est-à-dire la catégorie des ensembles munis du type de structure défini par $\mathbb{T}$.

Alors il existe un procédé naturel qui permet d'associer à la théorie $\mathbb{T}$ un topos $\mathcal{E}_\mathbb{T}$, appelé son topos classifiant, tel que $\mathcal{C}$ soit équivalente à la catégorie $\mathrm{pt}(\mathcal{E})$ des points de $\mathcal{E}_\mathbb{T}$.

Remarques :

(i) On verra au §II.2 (théorème II.7) ce qu'est exactement une théorie "géométrique" du premier ordre et comment son "topos classifiant" est caractérisé à équivalence près.

(ii) En particulier, toutes les théories algébriques – telles que celles des groupes, des anneaux, des modules sur un anneau, etc. – sont géométriques du premier ordre donc les catégories des groupes, des anneaux, des modules sur un anneau, etc., s'interprètent comme les catégories des points des topos classifiants de ces théories. □

On a d'autre part :

Proposition I.10. (Voir par exemple [TTB] §7.1, proposition 7.1.) –

Pour toute théorie du premier ordre (au sens de la logique) $\mathbb{T}$*, il est possible d'associer naturellement à* $\mathbb{T}$ *une théorie "géométrique" du premier ordre* $\mathbb{T}'$ *telle que la collection des classes d'isomorphie des modèles (ensemblistes) de* $\mathbb{T}$ *s'identifie à celle de* $\mathbb{T}'$*.*

Par conséquent, cette collection s'identifie aussi à celle des classes d'isomorphie des points du topos classifiant $\mathcal{E}_{\mathbb{T}'}$ *de* $\mathbb{T}'$*.*

Remarques :

(i) La théorie "géométrique" $\mathbb{T}'$ associée à $\mathbb{T}$ est appelée sa "Morleyisation".

(ii) Dans la "théorie des modèles" classique, on étudie le plus souvent les collections des classes d'isomorphie de modèles ensemblistes des théories du premier ordre $\mathbb{T}$.

La catégorie des modèles ensemblistes d'une telle théorie $\mathbb{T}$ est un invariant plus fin et, si $\mathbb{T}$ est "géométrique", son topos classifiant $\mathcal{E}_{\mathbb{T}}$ est un invariant encore plus fin. □

Le théorème I.9 est complété par le résultat suivant en sens inverse :

Théorème I.11. (M. Makkai et G. Reyes, [FOCL] ; voir aussi [TTB] §7.2, théorème 7.10.) –

Pour tout topos $\mathcal{E}$*, il existe des théories géométriques du premier ordre* $\mathbb{T}$ *dont le topos classifiant* $\mathcal{E}_{\mathbb{T}}$ *soit équivalent à* $\mathcal{E}$*.*

Remarques :

(i) Pour tout topos $\mathcal{E}$, il existe une infinité de telles théories $\mathbb{T}$.

(ii) Ce résultat est théorique. Dans la pratique, partant d'une topos $\mathcal{E}$ associé à un site $(\mathcal{C}, J)$, il est souvent délicat de l'exprimer comme le topos classifiant de théories géométriques du premier ordre avec lesquelles il soit intéressant de travailler.

(iii) Chaque fois qu'un topos $\mathcal{E}$ est exprimé comme le classifiant $\mathcal{E}_{\mathbb{T}}$ d'une théorie géométrique $\mathbb{T}$, son invariant $\mathrm{pt}(\mathcal{E})$ est calculé comme la catégorie des modèles ensemblistes $\mathbb{T}$-mod (Ens) de $\mathbb{T}$. □

2 Autre exemple d'invariant : l'ensemble ordonné des sous-topos d'un topos

Commençons par définir la notion de sous-topos :

Définition I.12. ([SGA4] exposé IV, §9.1.) –

(i) *Un morphisme géométrique de topos*

$$f = (f^*, f_*) : \mathcal{E}_1 \longrightarrow \mathcal{E}_2$$

est appelé une inclusion si sa composante d'image directe f_* *est un foncteur pleinement fidèle.*

(ii) *Un sous-topos d'un topos* $\mathcal{E}$ *est une classe d'équivalence d'inclusions*

$$\mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{E}.$$

Exemple :

Pour tout espace topologique X et tout sous-espace localement fermé Y de X, le topos $\mathcal{E}_Y$ de Y est un sous-topos du topos $\mathcal{E}_X$ de X. □

On a le résultat de structure :

Proposition I.13. (Voir [SE] exemple A.4.5.13(f).) –

Pour tout topos $\mathcal{E}$, les sous-topos de $\mathcal{E}$ forment un ensemble ordonné.

Il a la structure d'une algèbre de co-Heyting au sens de la définition suivante. □

Définition I.14. –

(i) *Un treillis distributif est un ensemble ordonné qui possède un minimum et un maximum, dans lequel toute paire d'éléments x, y a un infimum $x \wedge y$ et un supremum $x \vee y$ et où les deux opérations $\wedge$ et $\vee$ sont distributives l'une par rapport à l'autre.*

(ii) *Une algèbre de Heyting est un treillis distributif dans lequel il existe une opération binaire d'implication*

$$(a, b) \longmapsto (a \Rightarrow b)$$

caractérisée par la condition

$$a \wedge x \leq b \Leftrightarrow x \leq (a \Rightarrow b).$$

(iii) *Une algèbre de co-Heyting est un treillis distributif dans lequel il existe une opération binaire de soustraction*

$$(a, b) \longmapsto a \backslash b$$

caractérisée par la condition

$$(a \backslash b) \leq x \Leftrightarrow a \leq b \vee x.$$

□

On a le théorème suivant qui permet d'exprimer cet invariant des topos en termes de deux types de présentation :

Théorème I.15. –

(i) *Si un topos $\mathcal{E}$ est présenté comme topos des faisceaux $\mathcal{E}_{\mathcal{C},J}$ sur un site $(\mathcal{C}, J)$, l'ensemble des sous-topos de $\mathcal{E}$ s'identifie à l'ensemble des topologies de Grothendieck J' sur $\mathcal{C}$ qui contiennent J.*

(ii) (O.C. [LT] §3, théorème 3.6.) *Si un topos $\mathcal{E}$ est présenté comme le classifiant d'une théorie géométrique $\mathbb{T}$, l'ensemble des sous-topos de $\mathcal{E}$ s'identifie à celui des théories géométriques $\mathbb{T}'$ quotients de $\mathbb{T}$ (c'est-à-dire écrites dans le même langage mais avec davantage d'axiomes), considérées à équivalence syntactique près (c'est-à-dire en considérant deux théories comme équivalentes lorsque toute implication entre formules démontrable dans l'une est démontrable dans l'autre).*

Remarques :

(i) On voit en particulier que si Y est un sous-espace localement fermé d'un espace topologique X, le topos $\mathcal{E}_Y$ peut être défini par une topologie sur la catégorie des ouverts de X qui contient la topologie naturelle de X.

(ii) Si un même topos est présenté de deux manières différentes à partir de sites $(\mathcal{C}, J)$ ou de théories géométriques $\mathbb{T}$, la correspondance entre les expressions dans ces deux présentations de l'invariant que constitue l'ensemble ordonné de ses sous-topos peut être absolument non triviale.

(iii) Il résulte de la partie (ii) du théorème et de la proposition I.13 que l'ensemble ordonné des classes d'équivalence de théories quotients d'une théorie géométrique $\mathbb{T}$ est une algèbre de Heyting (le sens de la relation d'ordre étant inversé). □

Pour clôre ce paragraphe, remarquons que, de même qu'un point particulier d'un topos n'est pas un invariant mais la catégorie de tous les points d'un topos considérée à équivalence près l'est, de même un sous-topos particulier d'un topos n'est pas en général un invariant mais l'ensemble ordonné de tous les sous-topos d'un topos est un invariant.

3 Les invariants les plus classiques des topos et des morphismes de topos : les invariants cohomologiques

En fait, la recherche de tels invariants a été la motivation originale de Grothendieck pour introduire la notion de topos.

Plus précisément, il s'agissait de définir sur les variétés algébriques sur un corps arbitraire des théories cohomologiques satisfaisant les conditions demandées par Weil pour rendre possible la démonstration de ses fameuses conjectures. C'est ainsi qu'en munissant diverses catégories de schémas de la topologie dite étale, Grothendieck a pu définir les topos étales puis les théories de cohomologie étale et de cohomologie ℓ-adique des schémas. Une construction plus abstraite lui a également permis de définir des sites cristallins sur les schémas sur un corps fini, des topos cristallins et finalement des espaces de cohomologie cristalline de ces schémas.

La possibilité de définir des invariants cohomologiques des topos repose sur le résultat général suivant :

Proposition I.16. ([SGA4] exposé V.) –
(i) *Pour tout topos $\mathcal{E}$, la catégorie* $\mathrm{Ab}(\mathcal{E})$ *des objets abéliens de $\mathcal{E}$ est une catégorie abélienne de Grothendieck (c'est-à-dire qui satisfait les conditions de son article* [Tohoku]*).*

(ii) *Plus généralement, si $\mathcal{O}$ est un anneau dans un topos $\mathcal{E}$, la catégorie $\mathcal{M}od(\mathcal{E},\mathcal{O})$ des $\mathcal{O}$-modules de $\mathcal{E}$ est une catégorie abélienne de Grothendieck. En particulier, elle a suffisamment d'objets injectifs.*

Remarques :

(i) On appelle topos annelé la donnée d'un topos $\mathcal{E}$ et d'un anneau $\mathcal{O}$ de ce topos.

Un morphisme de topos annelés $(\mathcal{E}_1,\mathcal{O}_1)\to(\mathcal{E}_2,\mathcal{O}_2)$ est la donnée d'un morphisme de topos $f=(f^*,f_*):\mathcal{E}_1\to\mathcal{E}_2$ et d'un morphisme d'anneaux $\mathcal{O}_2\to f_*\,\mathcal{O}_1$ ou, ce qui revient au même, $f^*\,\mathcal{O}_2\to\mathcal{O}_1$.

(ii) Dans le cas où $\mathcal{E}$ est le topos classifiant BG d'un groupe prodiscret G et $\mathcal{O}$ est l'objet constant égal à un anneau (discret) R, $\mathcal{M}od(\mathcal{E},\mathcal{O})$ est la catégorie des représentations continues de G dans les R-modules.

□

Si $\mathcal{O}$ est un anneau commutatif dans un topos $\mathcal{E}$, la catégorie abélienne $\mathcal{M}od(\mathcal{E},\mathcal{O})$ est munie d'un produit tensoriel

$$(\mathcal{M}_1,\mathcal{M}_2)\longmapsto\mathcal{M}_1\otimes_{\mathcal{O}}\mathcal{M}_2$$

et d'une exponentiation interne

$$(\mathcal{M}_1,\mathcal{M}_2)\longmapsto\mathcal{H}om_{\mathcal{O}}(\mathcal{M}_1,\mathcal{M}_2).$$

Ces deux foncteurs induisent des foncteurs dérivés $\otimes_L$ et $R\,\mathcal{H}om_{\mathcal{O}}(\bullet,\bullet)$ entre catégories dérivées de $\mathcal{M}od(\mathcal{O},\mathcal{E})$.

Si $f=(f^*,f_*):(\mathcal{E}_1,\mathcal{O}_1)\to(\mathcal{E}_2,\mathcal{O}_2)$ est un morphisme de topos annelés, il induit un foncteur exact à gauche

$$f_*:\mathcal{M}od(\mathcal{E}_1,\mathcal{O}_1)\to\mathcal{M}od(\mathcal{E}_2,\mathcal{O}_2)$$

et son adjoint à gauche qui est exact à droite

$$f^*:\mathcal{M}od(\mathcal{E}_2,\mathcal{O}_2)\to\mathcal{M}od(\mathcal{E}_1,\mathcal{O}_1).$$

Ces deux foncteurs induisent aussi des foncteurs dérivés Rf_* et Rf^* entre catégories dérivées de $\mathcal{M}od(\mathcal{E}_1,\mathcal{O}_1)$ et $\mathcal{M}od(\mathcal{E}_2,\mathcal{O}_2)$.

Enfin, pour certains types de morphismes de topos annelés

$$f=(f^*,f_*):(\mathcal{E}_1,\mathcal{O}_1)\to(\mathcal{E}_2,\mathcal{O}_2),$$

Grothendieck et ses successeurs ont défini un foncteur d'image directe à supports compacts $Rf_!$ entre catégories dérivées et son adjoint à droite $Rf^!$.

Ce sont les "six opérations" de Grothendieck.

La construction de ces six opérations est généralement complétée par la définition de catégories de "bons coefficients" c'est-à-dire de sous-catégories pleines de catégories dérivées de $\mathcal{M}od\,(\mathcal{E},\mathcal{O})$, définies en demandant que les objets de cohomologie des complexes soient "constructibles" en un certain sens, et qui doivent être envoyées les unes dans les autres par les six opérations.

Quand les topos sont associés à des objets géométriques X via des sites définis à partir de ces objets, leurs invariants cohomologiques se sont révélés des instruments privilégiés d'étude des objets géométriques X. En revanche, quand ils sont associés à des théories géométriques $\mathbb{T}$ en tant que topos classifiants, leurs invariants cohomologiques ne sont en général pas les invariants les plus importants pour l'étude des théories $\mathbb{T}$: ils apparaissent souvent comme trop grossiers dans un tel contexte de logique.

4 Les invariants d'homotopie

On peut se demander si les invariants fondamentaux des espaces topologiques X connexes et localement contractiles (au sens que tout point x de X admet une base de voisinages ouverts contractiles) que constituent leurs groupes de Poincaré $\pi_1(X,x)$, $x \in X$, et leurs groupes d'homotopie supérieurs $\pi_n(X,x)$, $x \in X$, $n \geq 2$, se généralisent aux topos.

Effectivement, M. Artin et B. Mazur ont construit dans leur livre [EH] des "groupes fondamentaux étales" $\pi_1(\mathcal{E},x)$ et des "groupes d'homotopie étale" (abéliens) $\pi_n(\mathcal{E},x)$, $n \geq 2$, associés aux topos $\mathcal{E}$ qui sont localement connexes et connexes et aux points x de $\mathcal{E}$.

Une présentation succincte de cette construction est donnée au §I.4 du livre [CSCT] de I. Moerdijk.

Rappelons-la en quelques mots.

Un objet d'un topos $\mathcal{E}$ est dit connexe s'il ne peut s'écrire comme une somme disjointe de sous-objets non triviaux. Un topos $\mathcal{E}$ est dit localement connexe si tout objet de $\mathcal{E}$ se décompose comme une somme disjointe de sous-objets connexes. Dans ce cas, cette décomposition est essentiellement unique et associe à tout objet a de $\mathcal{E}$ l'ensemble $\pi_0(a)$ de ses sous-objets connexes, appelé ensemble des composantes connexes de a. Le foncteur ainsi défini

$$\pi_0 : \mathcal{E} \longrightarrow \mathrm{Ens}$$

est adjoint à gauche du foncteur d'image réciproque

$$\Gamma^* : \mathrm{Ens} \longrightarrow \mathcal{E}$$

par le morphisme canonique de topos

$$\Gamma = (\Gamma^*, \Gamma_*) : \mathcal{E} \longrightarrow \mathrm{Ens}.$$

On dit qu'un topos localement connexe $\mathcal{E}$ est connexe si et seulement si son objet final 1 est connexe, autrement dit si l'ensemble $\pi_0(1)$ est réduit à un élément.

Considérons donc un topos $\mathcal{E}$ localement connexe et connexe.

On dit qu'un objet a de $\mathcal{E}$ est localement constant s'il existe un épimorphisme $u \to 1$ de $\mathcal{E}$ et un ensemble S tel que

$$a \times u \cong \coprod_{s \in S} u.$$

Soit $\mathrm{SLC}\,(\mathcal{E})$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{E}$ constituée des sommes d'objets localement constants de $\mathcal{E}$. Alors tout point x du topos $\mathcal{E}$ induit un foncteur

$$x^* : \mathrm{SLC}\,(\mathcal{E}) \longrightarrow \mathrm{Ens}.$$

On montre que si G désigne le groupe des automorphismes de ce foncteur x^*, muni de la topologie la moins fine qui rend continues les actions de G sur les ensembles images des objets de $\mathrm{SLC}(\mathcal{E})$, alors x^* induit une équivalence de catégories

$$x^* : \mathrm{SLC}(\mathcal{E}) \xrightarrow{\sim} BG.$$

Les catégories $\mathrm{SLC}(\mathcal{E})$ sont un peu plus générales que les "catégories galoisiennes" de Grothendieck de [SGA1] car les groupes prodiscrets G qui apparaissent ici ne sont pas nécessairement profinis ; en revanche, leurs sous-groupes ouverts forment une base de voisinage de l'unité.

Le groupe topologique G est noté $\pi_1(\mathcal{E}, x)$ et appelé le groupe fondamental du topos $\mathcal{E}$ en le point x.

Pour définir les groupes d'homotopie supérieurs $\pi_n(\mathcal{E}, x)$, $n \geq 2$, on a besoin de la notion d'hyper-recouvrement (tirée de [SGA4] exposé V).

On note Δ la catégorie simpliciale dont les objets sont les ensembles ordonnés $\Delta_n = \{0, 1, \ldots, n\}$ et les morphismes sont les applications croissantes. Pour tout n, on note $\Delta[n]$ la sous-catégorie pleine de Δ constituée des Δ_m, $m \leq n$.

Si $\mathcal{E}$ est un topos, on note $\Delta\,\mathcal{E}$ la catégorie des objets simpliciaux de $\mathcal{E}$, c'est-à-dire des foncteurs contravariants

$$\Delta^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathcal{E}.$$

Pour tout entier n, on note également $\Delta\,\mathcal{E}\,[n]$ la catégorie des foncteurs contravariants

$$\Delta\,[n]^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathcal{E}.$$

Le foncteur de restriction

$$i_n^* : \Delta\,\mathcal{E} \longrightarrow \Delta\,\mathcal{E}\,[n]$$

admet un adjoint à droite

$$i_{n*} : \Delta\,\mathcal{E}\,[n] \longrightarrow \Delta\,\mathcal{E}.$$

Leur composé

$$i_{n*} \circ i_n^* : \Delta\,\mathcal{E} \longrightarrow \Delta\,\mathcal{E}$$

est appelé le foncteur "cosquelette" d'ordre n et noté cosk_n.

Alors un objet simplicial $a_\bullet = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\Delta\,\mathcal{E}$ est appelé un hyper-recouvrement si

- le morphisme canonique $a_0 \to 1$ est un épimorphisme de $\mathcal{E}$,
- pour tout entier n, le morphisme canonique

$$a_{n+1} \longrightarrow \mathrm{cosk}_n(a_\bullet)_{n+1}$$

est un épimorphisme.

Supposons dorénavant que $\mathcal{E}$ est un topos localement connexe et connexe.

Pour tout tel hyper-recouvrement $a_\bullet = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, les composantes connexes des a_n définissent un ensemble simplicial $\pi_0(a_\bullet)$.

Si $x = (x^*, x_*) : \mathrm{Ens} \to \mathcal{E}$ est un point de $\mathcal{E}$, on appelle point-base de $a_\bullet$ en x un sommet x_0 de l'ensemble simplicial $x^*(a_\bullet)$. Son image par l'application d'adjonction

$$x^*(a_\bullet) \longrightarrow x^*(\Gamma^*\,\pi_0(a_\bullet)) = \pi_0(a_\bullet)$$

est un sommet $\tilde{x}_0$ de l'ensemble simplicial $\pi_0(a_\bullet)$.

Alors les “groupes d’homotopie étale” de $\mathcal{E}$ sont définis comme les limites projectives

$$\pi_n(\mathcal{E},x) = \varprojlim_{(a_\bullet,x_0)} \pi_n(\pi_0(a_\bullet),\tilde{x}_0)$$

prises sur les hyper-recouvrements $a_\bullet$ munis d’un point-base x_0 en x et sur les classes d’homotopie de morphismes entre eux.

Si $n = 1$, le $\pi_1(\mathcal{E},x)$ ainsi défini s’identifie à celui déjà construit.

D’autre part, si $\mathcal{E} = \mathcal{E}_X$ est le topos des faisceaux sur un espace topologique connexe et localement contractile X, et si x est un point de X également vu comme un point de $\mathcal{E}_X$, alors les groupes topologiques

$$\pi_n(\mathcal{E}_X,x), \quad n \geq 1,$$

sont discrets et s’identifient aux groupes d’homotopie classiques

$$\pi_n(X,x), \quad n \geq 1.$$

5 Cinq exemples de propriétés invariantes : atomicité, bivalence, Boole, De Morgan, de type préfaisceau

Nous allons donner cinq exemples de propriétés invariantes des topos qui sont souvent pertinentes dans l’étude des topos classifiants $\mathcal{E}_{\mathbb{T}}$ de théories géométriques du premier ordre $\mathbb{T}$.

Commençons par rappeler :

Proposition I.17. ([SGA4] exposé II, §4 ; voir aussi [TTB] §3.3, théorème 3.11.) –

(i) *Dans un topos $\mathcal{E}$, les (petites) limites et colimites arbitraires sont représentables. En particulier, $\mathcal{E}$ possède un objet initial $\varnothing$ et un objet final.*

(ii) *Pour tout objet a d’une topos $\mathcal{E}$, les classes d’équivalence de sous-objets de a (c’est-à-dire d’objets b munis d’un monomorphisme $b \rightarrowtail a$) forment un ensemble ordonné qui a la structure d’une algèbre de Heyting au sens de la définition* I.14(iii).

En particulier, l’ensemble des sous-objets d’un objet a est muni d’opérations d’intersection $\wedge$, de réunion $\vee$ et de négation $b \mapsto (b \Rightarrow \varnothing) = \neg b$.

Remarque :

Un objet a d’un topos $\mathcal{E}$ est appelé un atome si l’ensemble ordonné de ses sous-objets compte exactement deux éléments : l’objet initial $\varnothing$ et lui-même. □

On peut maintenant définir les cinq propriétés invariantes suivantes des topos :

Définition I.18. –

(i) (M. Barr et R. Diaconescu, [AT].) *Un topos $\mathcal{E}$ est dit “atomique” si tout objet de $\mathcal{E}$ est une somme disjointe d’objets atomiques de $\mathcal{E}$.*

(ii) *Un topos $\mathcal{E}$ est dit “bivalent” ou “à deux valeurs” si son objet final est atomique.*

(iii) *Un topos $\mathcal{E}$ est dit “Booléen” si tout sous-objet b d’un objet a de $\mathcal{E}$ satisfait la relation*

$$b \vee \neg b = a.$$

(iv) *Un topos $\mathcal{E}$ est dit “de De Morgan” si tout sous-objet b d’un objet a de $\mathcal{E}$ satisfait la relation*

$$\neg b \vee \neg\neg b = a.$$

(v) *Un topos $\mathcal{E}$ est dit “de type préfaisceau” s’il est équivalent au topos $\widehat{\mathcal{C}}$ des préfaisceaux d’ensembles sur une catégorie $\mathcal{C}$.*

Remarques :

(i) Il est évident sur les définitions que ces propriétés sont invariantes par équivalence de topos.

(ii) Un topos "Booléen" est a fortiori de "De Morgan" mais la réciproque est fausse. □

Voyons maintenant ce que signifie pour une théorie géométrique du premier ordre $\mathbb{T}$ que son topos classifiant $\mathcal{E}_{\mathbb{T}}$ possède l'une de ces cinq propriétés invariantes. Commençons par les trois propriétés de bivalence, de Boole ou de De Morgan qui sont moins techniques :

Proposition I.19. –

Soient $\mathbb{T}$ une théorie géométrique du premier ordre et $\mathcal{E}_{\mathbb{T}}$ son topos classifiant. Alors :

(i) (voir [ATCC] §2, remarque 3.5.) *Le topos $\mathcal{E}_{\mathbb{T}}$ est bivalent si et seulement si la théorie $\mathbb{T}$ est complète au sens géométrique, ce qui signifie que toute formule géométrique fermée (c'est-à-dire sans variable libre) écrite dans le langage de $\mathbb{T}$ est ou bien démontrablement vraie ou bien démontrablement fausse dans $\mathbb{T}$.*

(ii) (O.C. [DCT] §3.1, théorème 4.2.) *Le topos $\mathcal{E}_{\mathbb{T}}$ est Booléen si et seulement si, pour toute formule géométrique $\varphi(\vec{x})$ en des variables $\vec{x}$ écrite dans le langage de $\mathbb{T}$, il existe une formule géométrique $\psi(\vec{x})$ en les mêmes variables et le même langage telle que*

- *la conjonction de φ et ψ est contradictoire ($\varphi \wedge \psi \vdash_{\vec{x}} \bot$),*
- *la disjonction de φ et ψ est démontrablement vraie ($\top \vdash_{\vec{x}} \varphi \vee \psi$).*

(iii) (O.C. [DCT] §3.1, théorème 4.1) *Le topos $\mathcal{E}_{\mathbb{T}}$ est de De Morgan si et seulement si, pour toute formule géométrique $\varphi(\vec{x})$ en des variables $\vec{x}$ écrite dans le langage de $\mathbb{T}$, il existe deux formules géométriques $\psi_1(\vec{x})$ et $\psi_2(\vec{x})$ écrite en les mêmes variables $\vec{x}$ et le même langage telles que*

- *la conjonction de φ et ψ_1 est contradictoire ($\varphi \wedge \psi_1 \vdash_{\vec{x}} \bot$),*
- *la disjonction de ψ_1 et ψ_2 est démontrablement vraie ($\top \vdash_{\vec{x}} \psi_1 \vee \psi_2$),*
- *toute formule géométrique $\chi(\vec{x})$ qui implique ψ_2 ($\chi \vdash_{\vec{x}} \psi_2$) et qui contredit φ ($\chi \wedge \varphi \vdash_{\vec{x}} \bot$) est contradictoire.* □

Pour exprimer le sens de l'atomicité, on a besoin de la définition suivante :

Définition I.20. –

Soit $\mathbb{T}$ une théorie géométrique du premier ordre.

Une formule géométrique $\varphi(\vec{x})$ en des variables $\vec{x}$ écrite dans le langage de $\mathbb{T}$ est dite $\mathbb{T}$-complète si elle n'est pas contradictoire et si toute formule géométrique $\psi(\vec{x})$ en les mêmes variables $\vec{x}$ et le même langage ou bien contredit φ ($\varphi \wedge \psi \vdash_{\vec{x}} \bot$) ou bien l'implique ($\psi \vdash_{\vec{x}} \varphi$). □

Cette définition étant posée, on a :

Proposition I.21. –

Soient $\mathbb{T}$ une théorie géométrique du premier ordre et $\mathcal{E}_{\mathbb{T}}$ son topos classifiant.

Alors le topos $\mathcal{E}_{\mathbb{T}}$ est atomique si et seulement si, pour toute formule géométrique $\varphi(\vec{x})$ écrite dans le langage de $\mathbb{T}$, il existe une (unique) famille de formules géométriques $\mathbb{T}$-complètes $\psi_i(\vec{x})$, $i \in I$, écrites en les mêmes variables et le même langage, telles que

- *chaque ψ_i implique φ ($\psi_i \vdash_{\vec{x}} \varphi$),*
- *pour tous i, j, ψ_i et ψ_j se contredisent ($\psi_i \wedge \psi_j \vdash_{\vec{x}} \bot$),*
- *φ implique la disjonction des ψ_i ($\varphi \vdash_{\vec{x}} \bigvee_{i \in I} \psi_i$).* □

Il est particulièrement intéressant qu'une théorie géométrique $\mathbb{T}$ soit à la fois atomique et bivalente (au sens que son topos classifiant le soit) :

Proposition I.22. (O.C. [ATCC] §3, remarque 3.7.) –

Soit $\mathbb{T}$ une théorie géométrique du premier ordre supposée atomique (au sens que son topos classifiant $\mathcal{E}_{\mathbb{T}}$ est atomique).

Alors $\mathbb{T}$ est géométriquement complète (autrement dit son topos classifiant $\mathcal{E}_{\mathbb{T}}$ est bivalent) si et seulement si elle est complète au sens que toute formule du premier ordre (qu'elle soit géométrique ou non) écrite dans le langage de $\mathbb{T}$ et fermée (sans variable libre) est démontrablement vraie ou démontrablement fausse dans $\mathbb{T}$. □

Afin d'énoncer un critère pour qu'une théorie géométrique $\mathbb{T}$ soit "de type préfaisceau" (au sens que son topos classifiant $\mathcal{E}_{\mathbb{T}}$ le soit), on a besoin de définir quelques nouveaux termes :

Définition I.23. –

Soit $\mathbb{T}$ une théorie géométrique du premier ordre.

(i) (P. Gabriel et F. Ulmer [LPK].) *Un objet M de la catégorie $\mathcal{C} = \mathbb{T}\text{-mod}\,(\text{Ens})$ des modèles ensemblistes de $\mathbb{T}$ est dit "finiment présentable" si le foncteur*

$$\text{Hom}\,(M, \bullet) : \mathcal{C} \longrightarrow \text{Ens}$$

commute aux colimites filtrées arbitraires.

(ii) *Un tel modèle ensembliste M de $\mathbb{T}$ est dit présenté par une formule $\varphi(\vec{x})$ en des variables $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ écrite dans le langage de $\mathbb{T}$ si et seulement si se donner une flèche de M dans un autre modèle ensembliste N de $\mathbb{T}$ équivaut à se donner n éléments*

$$y_1, \ldots, y_n \in N$$

tels que la formule $\varphi(y_1, \ldots, y_n)$ soit valide dans N. □

Cette définition étant posée, on a :

Théorème I.24. (O.C. [EFTP] §7.1, théorème 7.7.) –

Une théorie géométrique du premier ordre $\mathbb{T}$ est "de type préfaisceau" si et seulement si elle satisfait les trois conditions suivantes :

(1) *Les modèles ensemblistes finiment présentables de $\mathbb{T}$ sont globalement conservatifs au sens qu'une implication*

$$\varphi \underset{\vec{x}}{\longmapsto} \psi$$

entre formules géométriques $\varphi(\vec{x})$, $\psi(\vec{x})$ écrites dans le langage de $\mathbb{T}$ est démontrable dans $\mathbb{T}$ si et seulement si elle est vérifiée dans tous les modèles ensemblistes finiment présentables.

(2) *Tout modèle ensembliste finiment présentable de $\mathbb{T}$ est présenté par une formule géométrique.*

(3) *Toute propriété des familles finies $x_1, \ldots, x_n$ d'éléments des modèles ensemblistes finiment présentables qui est préservée par les homomorphismes de $\mathbb{T}$-modèles est définissable par une formule géométrique $\varphi(\vec{x})$.*

Remarque :

Le texte [EFTP] donne plusieurs autres critères pour qu'une théorie soit de type préfaisceau et des méthodes pour engendrer de telles théories. □

Il est connu en particulier que toutes les théories algébriques (groupes, anneaux, modules sur un anneau, etc.) sont de type préfaisceau.

6 Deux exemples de constructions invariantes : la Booléanisation et la Demorganisation

Nous allons présenter deux manières d'associer un sous-topos particulier à tout topos de façon compatible avec les équivalences.

Posons d'abord la définition suivante :

Définition I.25. (W. Lawvere et M. Tierney.) –

Dans un topos $\mathcal{E}$, un sous-objet b d'une objet a est dit dense si

$$\neg\neg b = a.$$

Remarque :

On rappelle que l'ensemble des sous-objets d'un objet a d'un topos est une algèbre de Heyting, muni en particulier de l'opération de négation

$$b \longmapsto \neg b = (b \Rightarrow \varnothing)$$

donc aussi de son itérée

$$b \longmapsto \neg(\neg b) = \neg\neg b.$$

$\square$

Cette définition permet de formuler la proposition suivante :

Proposition I.26. (W. Lawvere et M. Tierney.) –

Soit $\mathcal{E}$ un topos arbitraire.

Soit $\mathcal{E}_{\neg\neg}$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{E}$ constituée des objets a tels que, pour tout objet b de $\mathcal{E}$ et tout sous-objet dense b' de b, l'application

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(b, a) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(b', a)$$

est bijective.

Alors $\mathcal{E}_{\neg\neg}$ est un sous-topos de $\mathcal{E}$ et il est toujours Booléen.

Remarque :

Cette proposition est un cas particulier du théorème II.27 que l'on présentera au paragraphe II.4, compte tenu de l'exemple qui suit la définition II.26. $\square$

Le sous-topos $\mathcal{E}_{\neg\neg}$ d'un topos $\mathcal{E}$ est appelé sa Booléanisation.

On a aussi :

Proposition I.27. (O.C. [DCT] §2, théorème 2.3.) –

Soit $\mathcal{E}$ un topos arbitraire.

Alors, parmi les sous-topos de $\mathcal{E}$ qui sont plus grands que $\mathcal{E}_{\neg\neg}$ et sont de De Morgan, il y en a un plus grand que tous les autres.

On l'appelle la Demorganisation de $\mathcal{E}$.

Combinant ces deux propositions avec le théorème I.15(ii), on voit que l'on peut associer canoniquement à toute théorie géométrique du premier ordre $\mathbb{T}$ deux théories quotients de $\mathbb{T}$ appelées sa Booléanisation et sa Demorganisation.

On peut se demander ce que ces deux constructions invariantes donnent quand on les applique à des théories concrètes. Voici un exemple :

Proposition I.28. (O.C. et P. Johnstone [DLTF] propositions 2.3 et 2.4.) –

Soit $\mathbb{T}$ la théorie des corps, formulée comme une théorie géométrique du premier ordre. Alors :

(i) *La Demorganisation de $\mathbb{T}$ est la théorie des corps dont le corps premier est fini et qui sont algébriques sur ce corps premier.*

(ii) *La Boolénisation de $\mathbb{T}$ est la théorie des clôtures algébriques des corps finis $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.* □

II. Richesse et profondeur des topos

1 Généralité des topos

Les topos sont des objets mathématiques extraordinairement généraux qu'il est possible de construire dans presque toutes les parties des mathématiques.

Par définition, les topos sont associés à des sites. Rappelons ce que sont les sites :

Définition II.1. ([SGA4] exposé II, §1.) –

(i) *On appelle crible d'un objet a d'une petite catégorie $\mathcal{C}$ tout ensemble S de flèches $b \to a$ de $\mathcal{C}$ de but a tel que la composée d'une flèche $b \to a$ de S et d'une flèche arbitraire $c \to b$ est encore dans S.*

(ii) *Une topologie de Grothendieck J sur une petite catégorie $\mathcal{C}$ est une famille d'ensembles de cribles $J(a)$ des objets a de $\mathcal{C}$ qui possède les trois propriétés suivantes :*

(1) *(Maximalité) Pour tout objet a de $\mathcal{C}$, le crible maximal constitué de toutes les flèches de but a est élément de $J(a)$.*

(2) *(Image réciproque) Pour toute flèche $f : b \to a$ de $\mathcal{C}$ et tout crible $S \in J(a)$, son image réciproque*

$$f^*(S) = \{g : c \to b \mid f \circ g \in S\}$$

est élément de $J(b)$.

(3) *(Transitivité) Si S est un crible d'un objet a de $\mathcal{C}$ tel qu'existe un crible $T \in J(a)$ avec la propriété*

$$\forall\, (f : b \to a) \in T, \quad f^*(S) \in J(b),$$

alors le crible S est élément de $J(a)$.

(iii) *Un site est un couple $(\mathcal{C}, J)$ constitué d'une petite catégorie $\mathcal{C}$ et d'une topologie de Grothendieck J sur $\mathcal{C}$.*

Remarques :

(i) On a une notion induite de topologie de Grothendieck sur une catégorie $\mathcal{C}$ essentiellement petite et donc de site $(\mathcal{C}, J)$ dont la catégorie sous-jacente $\mathcal{C}$ est essentiellement petite.

(ii) Pour tout site $(\mathcal{C}, J)$ et tout objet a de $\mathcal{C}$, les cribles éléments de $J(a)$ sont appelés les cribles couvrants de a. Une famille de flèches $b \to a$ vers un objet a est dite couvrante si le crible qu'elle engendre est couvrant.

(iii) Toute catégorie essentiellement petite $\mathcal{C}$ peut être considérée comme un site en associant à tout objet a de $\mathcal{C}$ l'ensemble $J(a)$ constitué de l'unique crible maximal de a. □

On peut alors définir la notion de faisceau sur un site :

Définition II.2. ([SGA4] exposé II, §2 et exposé IV, §1.) –

Soit $(\mathcal{C}, J)$ un site au sens de Grothendieck.

(i) *Un faisceau d'ensembles sur* $(\mathcal{C},J)$ *est un préfaisceau sur* $\mathcal{C}$*, c'est-à-dire un foncteur contravariant*

$$F : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Ens}$$

tel que, pour tout objet a *de* $\mathcal{C}$ *et tout crible couvrant* $S \in J(a)$*, l'application*

$$F(a) \longrightarrow \varprojlim_{(b \to a) \in S} F(b)$$

soit bijective.

(ii) *Le topos* $\mathcal{E}_{\mathcal{C},J}$ *associé au site* $(\mathcal{C},J)$ *est la catégorie des faisceaux d'ensembles sur* $(\mathcal{C},J)$*.*

Rappel :

On a déjà dit dans la définition I.1(i) que le mot "topos" désigne les catégories équivalentes aux catégories $\mathcal{E}_{\mathcal{C},J}$ de faisceaux sur les sites $(\mathcal{C},J)$. □

La notion de topos est très souple et très stable. Pour le voir, le critère de Giraud est souvent commode :

Théorème II.3. (J. Giraud, [SGA4] exposé IV, §1, théorème I.2.) –

(i) *Une catégorie* $\mathcal{E}$ *est un topos si et seulement si elle possède les cinq propriétés suivantes :*

- *Pour tous objets* a,b *de* $\mathcal{E}$*,* $\mathrm{Hom}\,(a,b)$ *est un ensemble.*
- *Les limites finies sont représentables dans* $\mathcal{E}$*.*
- *Les petites sommes directes sont représentables dans* $\mathcal{E}$*. Elles sont disjointes et commutent aux changements de base.*
- *Les relations d'équivalence dans* $\mathcal{E}$ *admettent des quotients dont la formation commute aux changements de base.*
- $\mathcal{E}$ *admet une petite famille génératrice.*

(ii) *Par conséquent, on a :*

(1) *Pour tout objet* a *d'un topos* $\mathcal{E}$*, la catégorie relative* $\mathcal{E}/a$ *des objets de* $\mathcal{E}$ *munis d'un morphisme vers* a *est encore un topos.*

(2) *Toute relation d'équivalence dans un topos* $\mathcal{E}$ *définit un topos, à savoir le topos relatif* $\mathcal{E}/a$ *associé à l'objet* a *de* $\mathcal{E}$ *quotient de cette relation d'équivalence.*

(3) *Pour tout groupe* G *d'un topos* $\mathcal{E}$*, la catégorie* BG *des objets de* $\mathcal{E}$ *munis d'une action de* G *est encore un topos, appelé le topos classifiant de* G*.*

Plus généralement, toute action d'un tel groupe G *d'un topos* $\mathcal{E}$ *sur un objet* a *de* $\mathcal{E}$ *définit un topos, à savoir le topos relatif* BG/a*.*

Remarque :

La notion de topos classifiant BG d'un groupe (ensembliste discret) G, déjà introduite en exemple I.2(iii) du §I.0, est le cas particulier de (ii)(3) où le topos $\mathcal{E}$ est celui Ens des ensembles. □

Les constructions du théorème II.3(ii) ci-dessus s'appliquent en particulier dans le contexte suivant :

Proposition II.4. (Voir [SGA4] exposé IV, §2.5.) –

(i) *Soit* $\mathcal{C}$ *une petite catégorie dans laquelle les produits finis sont représentables, munie d'une topologie de Grothendieck* J *qui est sous-canonique, c'est-à-dire telle que le foncteur canonique (composé du foncteur de Yoneda et du foncteur de faisceautisation) vers le topos associé* $\mathcal{E} = \mathcal{E}_{\mathcal{C},J}$

$$l : \mathcal{C} \to \mathcal{E}$$

soit pleinement fidèle.

Alors le foncteur l *commute aux produits finis et préserve les monomorphismes, et on a :*

(1) *Tout objet de $\mathcal{C}$ peut être vu comme un objet de $\mathcal{E}$ et définit donc un topos.*

(2) *Toute relation d'équivalence dans $\mathcal{C}$ peut être vue comme une relation d'équivalence dans E et définit donc un topos.*

(3) *Tout groupe interne G de $\mathcal{C}$ peut être vu comme un groupe de $\mathcal{E}$ et définit donc un topos classifiant BG.*

(ii) *Supposons de plus que les limites finies soient représentables dans $\mathcal{C}$. Alors, pour tout objet a de $\mathcal{C}$, la catégorie relative $\mathcal{C}/a$ des objets de $\mathcal{C}$ munis d'un morphisme vers a, munie de la topologie induite par J, vérifie les hypothèses de* (i) *et donc aussi ses conclusions.*

(iii) *En prenant pour J la topologie définie par les réunions d'images d'immersions ouvertes, les conditions de* (i) *sont vérifiées lorsque $\mathcal{C}$ est :*

- *la catégorie des variétés différentiables,*
- *la catégorie des variétés analytiques réelles,*
- *la catégorie des variétés analytiques complexes,*
- *la catégorie des schémas lisses sur un anneau de base,*

ou la catégorie des variétés d'une telle espèce munies d'un morphisme lisse vers une variété de base de la même espèce.

De plus, les conditions de (i) *et* (ii) *sont vérifiées lorsque $\mathcal{C}$ est*

- *la catégorie des espaces topologiques,*
- *la catégorie des schémas de présentation finie sur un anneau de base.*

Remarques :

(i) En particulier, toute variété différentiable [resp. analytique réelle, resp. analytique complexe] munie d'un feuilletage définit un topos.

D'autre part, tout espace topologique [resp. schéma de présentation finie sur un anneau de base] muni d'une relation d'équivalence définit un topos.

(ii) On dispose du topos classifiant BG de tout G qui est

- un groupe différentiable [resp. analytique réel, resp. analytique complexe] ou plus généralement un fibré en groupes lisse sur une variété différentiable [resp. analytique réelle, resp. analytique complexe],
- un fibré en groupes topologiques sur un espace topologique,
- un schéma en groupes algébriques sur un schéma de présentation finie sur un anneau de base. □

Une seconde manière de présenter les topos, différente de celle par les sites mais tout aussi générale, consiste à les exprimer comme "topos classifiants" de théories géométriques du premier ordre.

Précisons d'abord ce que sont ces théories :

Définition II.5. (voir par exemple [TTB] §4.1.) –

(i) *Une "signature" (ou langage) du premier ordre consiste en*

- *des "sortes" (= noms d'objets),*
- *des "symboles de fonctions" (= noms de flèches d'un produit fini d'objets dans un objet),*
- *des "symboles de relations" (= noms de sous-objets dans des produits finis d'objets).*

(ii) *Etant donnée une signature Σ, on forme :*

- *les "termes" de Σ qui sont les expressions formées en appliquant inductivement des symboles de fonctions à des variables,*

- *les "formules atomiques" de Σ qui sont constituées à partir des termes en s'autorisant à substituer ceux-ci dans des "symboles de relations" de Σ ou dans la relation d'égalité entre variables associées aux même sortes,*
- *les formules "géométriques du premier ordre" déduites des précédentes en ajoutant encore les formules du vrai $\top$ et du faux $\bot$ et en autorisant des conjonctions finitaires $\wedge$, des disjonctions infinitaires $\bigvee$ ainsi que le quantificateur existentiel $\exists$ portant sur une partie des variables,*
- *les formules "du premier ordre" déduites des formules atomiques en ajoutant encore les formules du vrai $\top$ et du faux $\bot$ et en autorisant des conjonctions $\bigwedge$, des disjonctions $\bigvee$, l'implication $\Rightarrow$ entre formules, le passage aux négations $\neg\varphi$ de formules φ ainsi que le quantificateur existentiel $\exists$ et le quantificateur universel $\forall$ portant sur une partie des variables.*

Enfin, on appelle contextes pour de telles formules des familles finies $\vec{x}$ de variables qui comprennent les variables libres de ces formules.

(iii) *Un séquent d'une signature Σ est une implication*

$$\varphi \vdash_{\vec{x}} \psi$$

entre deux formules du premier ordre φ et ψ de Σ dans le contexte d'une même famille finie $\vec{x}$ de variables.

Un tel séquent est dit géométrique si les formules qui le composent sont géométriques.

(iv) *Une théorie du premier ordre [resp. géométrique] dans la signature Σ est un ensemble $\mathbb{T}$ de séquents [resp. géométriques] de Σ qui sont appelés les axiomes de $\mathbb{T}$.*

Les séquents démontrables d'une théorie $\mathbb{T}$ sont les séquents qui se déduisent des axiomes de $\mathbb{T}$ suivant les règles d'inférence standard. □

Ayant défini les notions de signature et de théorie du premier ordre – c'est la syntaxe –, on peut maintenant parler de leurs interprétations dans des topos – c'est la sémantique catégorique :

Définition II.6. (Voir par exemple [TTB] §5.1. et §5.3.) –

(i) *Soient Σ une signature du premier ordre et $\mathcal{E}$ un topos ou plus généralement une catégorie qui possède des produits finis (et donc en particuler un objet final).*

Une Σ-structure M dans $\mathcal{E}$ consiste en :

- *une fonction qui associe à toute sorte A de Σ un objet MA de $\mathcal{E}$,*
- *une fonction qui associe à tout symbole de fonction $f : A_1 \dots A_n \to B$ de Σ une flèche*

$$MA_1 \times \dots \times MA_n \to MB \quad \text{de} \quad \mathcal{E}$$

  (où $MA_1 \times \dots \times MA_n$ est l'objet final de $\mathcal{E}$ si $n = 0$),
- *une fonction qui associe à tout symbole de relation $R \rightarrowtail A_1 \dots A_n$ de Σ un sous-objet*

$$MR \rightarrowtail MA_1 \times \dots \times MA_n \quad \text{dans} \quad \mathcal{E}.$$

(ii) *Dans les Σ-structures M d'un topos $\mathcal{E}$, on interprète :*

- *les substitutions de termes dans des relations comme des images réciproques de sous-objets,*
- *la formule du vrai $\top$ dans le contexte de variables $\vec{x}$ associées à des sortes $A_1 \dots A_n$ comme le sous-objet $MA_1 \times \dots \times MA_n$ de $MA_1 \times \dots \times MA_n$,*
- *la formule du faux $\bot$ comme le sous-objet initial $\varnothing$,*
- *les conjonctions $\wedge$ comme des intersections de sous-objets,*
- *les disjonctions $\bigvee$ comme des réunions de sous-objets,*

- *le quantificateur existentiel $\exists$ comme image par le morphisme de projection d'un produit fini de facteurs sur le sous-produit formé d'une partie de ces facteurs,*
- *le quantificateur universel $\forall$ comme image par un foncteur adjoint à droite du foncteur d'image réciproque des sous-objets d'un sous-produit d'un produit vers les sous-objets de ce produit,*
- *l'implication $\Rightarrow$ comme le foncteur qui associe à deux sous-objets a_1 et a_2 d'un objet a le plus grand sous-objet $(a_1 \Rightarrow a_2)$ de a tel que $(a_1 \Rightarrow a_2) \wedge a_1 \leq a_2$,*
- *la négation $\neg$ comme le foncteur qui associe à un sous-objet b d'un objet a le plus grand sous-objet $\neg b$ de a tel que $b \wedge \neg b = \varnothing$,*
- *les formules du premier ordre $\varphi(\vec{x})$ dans le contexte de variables $\vec{x}$ associées à des sortes $A_1 \dots A_n$ comme des sous-objets de $MA_1 \times \dots \times MA_n$.*

(iii) *Si $\mathbb{T}$ est une théorie du premier ordre de signature Σ, un modèle de $\mathbb{T}$ dans un topos $\mathcal{E}$ est une Σ-structure M dans $\mathcal{E}$ telle que, pour tout axiome de $\mathbb{T}$ écrit dans le contexte de variables $\vec{x}$ associées à des sortes $A_1 \dots A_n$,*

$$\varphi \vdash_{\vec{x}} \psi,$$

le sous-objet de $MA_1 \times \dots \times MA_n$ défini par la formule φ est contenu dans celui défini par la formule ψ.

Remarques :

(i) Les Σ-structures d'un topos $\mathcal{E}$ ou plus généralement d'une catégorie $\mathcal{E}$ qui possède des produits finis forment une catégorie notée $\Sigma\text{-Str}(\mathcal{E})$.

Tout foncteur entre deux telles catégories $\mathcal{C}_1 \to \mathcal{C}_2$ qui préserve les produits finis et les monomorphismes définit un foncteur

$$\Sigma\text{-Str}(\mathcal{C}_1) \to \Sigma\text{-Str}(\mathcal{C}_2).$$

(ii) Les modèles d'une théorie du premier ordre $\mathbb{T}$ dans un topos $\mathcal{E}$ forment une catégorie notée $\mathbb{T}\text{-mod}(\mathcal{E})$.

(iii) Si $\mathbb{T}$ est une théorie du premier ordre de signature Σ, alors pour tout topos $\mathcal{E}$, les modèles de $\mathbb{T}$ dans $\mathcal{E}$ forment une sous-collection stable par isomorphismes de la collection des Σ-structures de $\mathcal{E}$.

Réciproquement, étant donnée une signature du premier ordre Σ, on peut se demander à quelles conditions une collection $S = (S_{\mathcal{E}})_{\mathcal{E}}$ stable par isomorphismes de Σ-structures dans les topos $\mathcal{E}$ est la sous-collection des modèles dans les topos $\mathcal{E}$ d'une théorie du premier ordre $\mathbb{T}$ de signature Σ.

Répondant à une conjecture de I. Moerdijk, l'article [CTGL] de O.C. a montré (§3, théorème 2) qu'une telle collection $S = (S_{\mathcal{E}})_{\mathcal{E}}$ est la collection des modèles d'une théorie géométrique du premier ordre $\mathbb{T}$ de signature Σ si et seulement si :

- pour tout morphisme de topos $f = (f^*, f_*) : \mathcal{E}_1 \to \mathcal{E}_2$, le foncteur f^* envoie $S_{\mathcal{E}_2}$ dans $S_{\mathcal{E}_1}$,
- pour toute famille de morphismes de topos

$$f_i : \mathcal{E}_i \longrightarrow \mathcal{E}, \quad i \in I$$

qui est globalement surjective (au sens que le seul sous-topos de $\mathcal{E}$ à travers lequel se factorisent tous les $f_i : \mathcal{E}_i \to \mathcal{E}$ est $\mathcal{E}$ lui-même) et pour toute Σ-structure M dans $\mathcal{E}$, il suffit que $f_i^*(M)$ soit dans $S_{\mathcal{E}_i}$ quel que soit $i \in I$ pour que M soit dans $S_{\mathcal{E}}$.

□

Pour tout morphisme géométrique de topos

$$f = (f^*, f_*) : \mathcal{E}_1 \to \mathcal{E}_2$$

le foncteur d'image réciproque

$$f^* : \mathcal{E}_2 \to \mathcal{E}_1$$

commute aux limites finies et aux colimites arbitraires. Par conséquent, il induit un foncteur entre catégories de modèles

$$f^* : \mathbb{T}\text{-mod}(\mathcal{E}_2) \to \mathbb{T}\text{-mod}(\mathcal{E}_1)$$

de toute théorie géométrique du premier ordre $\mathbb{T}$ (mais pas en général d'une théorie du premier ordre qui n'est pas géométrique).

Autrement dit, toute théorie géométrique du premier ordre $\mathbb{T}$ définit un 2-foncteur contravariant $\mathbb{T}$-mod sur la 2-catégorie des topos, à valeurs dans la 2-catégorie des catégories.

Dans les années 1970, plusieurs mathématiciens – Lawvere, Joyal, Reyes, Makkai, Cole, Bénabou, ... – ont contribué à dégager le théorème très général suivant à partir de premiers exemples apparus dans la thèse [TASR] de Monique Hakim (soutenue sous la direction de Grothendieck) :

Théorème II.7. (M. Makkai et G. Reyes, [FOCL] ; voir aussi [TTB] §6.1. et §6.2. et §7.2, théorème 7.8(v).) –

Soit $\mathbb{T}$ une théorie géométrique du premier ordre. Alors :

(i) *Le 2-foncteur $\mathbb{T}$-mod des modèles de $\mathbb{T}$ dans les topos est représentable par un topos $\mathcal{E}_{\mathbb{T}}$, bien défini à équivalence près et appelé le "topos classifiant" de $\mathbb{T}$.*

Autrement dit, $\mathcal{E}_{\mathbb{T}}$ est caractérisé par l'existence, pour tout topos $\mathcal{E}$, d'une équivalence de catégories

$$\mathbb{T}\text{-}mod(\mathcal{E}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}om(\mathcal{E}, \mathcal{E}_{\mathbb{T}})$$

naturelle en $\mathcal{E}$.

(ii) *Le topos classifiant $\mathcal{E}_{\mathbb{T}}$ de $\mathbb{T}$ est construit comme associé au "site syntactique" $(\mathcal{C}_{\mathbb{T}}, J_{\mathbb{T}})$ défini de la manière suivante :*

- *Les objets de la catégorie syntactique $\mathcal{C}_{\mathbb{T}}$ de $\mathbb{T}$ sont les classes d'équivalence de formules géométriques*

$$\varphi(\vec{x})$$

  de la signature Σ de $\mathbb{T}$ dans des contextes $\vec{x}$ (en considérant deux telles formules comme équivalentes lorsque l'on peut passer de l'une à l'autre en renommant les variables).

- *Les morphismes de $\mathcal{C}_{\mathbb{T}}$ entre formules géométriques*

$$\varphi(\vec{x}) \longrightarrow \psi(\vec{y})$$

  (écrite dans les contextes de familles de variables $\vec{x}$ et $\vec{y}$ supposées disjointes) sont les classes d'équivalence de formules géométriques dans des contextes $\vec{x}$ et $\vec{y}$

$$\theta(\vec{x}, \vec{y})$$

  qui sont démontrablement fonctionnelles au sens que les séquents

$$\theta \vdash_{\vec{x},\vec{y}} \varphi \wedge \psi,$$

$$\varphi \vdash_{\vec{x}} (\exists\, \vec{y})\, \theta,$$

$$\theta(\vec{x}, \vec{y}) \wedge \theta(\vec{x}, \vec{y}\,') \vdash_{\vec{x},\vec{y},\vec{y}\,'} \vec{y} = \vec{y}\,'$$

  sont démontrables dans la théorie $\mathbb{T}$ (en considérant deux telles formules $\theta(\vec{x}, \vec{y})$ et $\theta'(\vec{x}, \vec{y})$ comme équivalentes si les séquents $\theta \vdash_{\vec{x},\vec{y}} \theta'$ et $\theta' \vdash_{\vec{x},\vec{y}} \theta$ sont démontrables dans la théorie $\mathbb{T}$).

- *La topologie syntactique $J_{\mathbb{T}}$ est définie en appelant couvrantes les familles de morphismes de $\mathcal{C}_{\mathbb{T}}$ de même but*
$$\varphi_i(\vec{x}_i) \xrightarrow{\theta_i(\vec{x}_i,\vec{y})} \psi(\vec{y})\,, \quad i \in I,$$
telles que le séquent
$$\psi \underset{\vec{y}}{\longmapsto} \bigvee_{i\in I} (\exists\, \vec{x}_i)\, \theta_i$$
est démontrable dans la théorie $\mathbb{T}$.

Remarque :

Ce théorème concerne les théories du premier ordre qui sont géométriques.

Or, il existe des théories d'ordre 2 (comme celle des espaces topologiques, celle des sites ou les théories usuelles de l'analyse) et des théories d'ordre supérieur (comme les théories homotopiques).

D'autre part, il existe des topos d'ordre supérieur, étudiés en particulier par J. Lurie (voir [HTT]).

Il serait bon de définir une notion de théories d'ordre supérieur géométriques auxquelles seraient associés des topos d'ordre supérieur classifiants.

□

Il résulte de ce théorème que toute théorie géométrique (du premier ordre) $\mathbb{T}$ possède dans son topos classifiant $\mathcal{E}_{\mathbb{T}}$ un modèle $M_{\mathbb{T}}$ tel que tout modèle M de $\mathbb{T}$ dans un topos $\mathcal{E}$ se déduise de $M_{\mathbb{T}}$ par image réciproque par un morphisme géométrique $\mathcal{E} \to \mathcal{E}_{\mathbb{T}}$ uniquement déterminé à équivalence près. Ce modèle de $M_{\mathbb{T}}$ de $\mathbb{T}$ dans $\mathcal{E}_{\mathbb{T}}$ est appelé son modèle universel.

La construction de ce modèle universel a pour conséquence :

Corollaire II.8. –

Pour toute théorie géométrique $\mathbb{T}$ de signature Σ, un séquent géométrique de Σ
$$\varphi \underset{\vec{x}}{\longmapsto} \psi$$
est démontrable dans la théorie $\mathbb{T}$ si et seulement si il est satisfait dans le modèle universel $M_{\mathbb{T}}$ de $\mathbb{T}$. □

La construction des topos comme topos classifiants de théories géométriques $\mathbb{T}$ est aussi générale que celle à partir des sites puisque, d'après le théorème I.11 déjà énoncé, tout topos s'écrit comme le topos classifiant de théories géométriques $\mathbb{T}$.

Une troisième manière complètement générale de présenter les topos est basée sur la notion de quantale introduite par C. Mulvey :

Définition II.9. –

(i) *Un treillis complet est un treillis distributif (au sens de la définition* I.14(i)*) dans lequel tout sous-ensemble fini ou infini I a un infimum $\bigwedge\limits_{i\in I}$ et un supremum $\bigvee\limits_{i\in I}$ distributifs l'un par rapport à l'autre.*

(ii) *Une quantale Q est un treillis complet muni d'une loi de composition*
$$\begin{array}{ccc} Q\times Q & \longrightarrow & Q \\ (a,b) & \longmapsto & a\cdot b \end{array}$$
qui commute aux supremums en chaque variable
$$a\cdot\left(\bigvee_{i\in I} b_i\right) = \bigvee_{i\in I} a\cdot b_i,$$

$$\left(\bigvee_{i\in I} a_i\right) \cdot b = \bigvee_{i\in I} a_i \cdot b.$$

(iii) *Une quantale modulaire Q est une quantale munie d'une involution $* : Q \to Q$ et telle que :*

- *la loi de composition de Q est associative et possède un élément neutre* 1,
- *Q vérifie la loi de modularité*

$$a \wedge b \cdot c \le (a \cdot c^* \wedge b) \cdot c\,, \quad \forall\, a, b, c \in Q.$$

Exemple :

Soit b un objet d'un topos $\mathcal{E}$.

Soit $\mathcal{R}el\,(b)$ l'ensemble ordonné des relations de b, c'est-à-dire des sous-objets de $b \times b$, muni de la loi de composition des relations et de l'involution définie par la permutation des 2 facteurs de $b \times b$.

Alors $\mathcal{R}el\,(b)$ est une quantale modulaire dont l'élément neutre est la diagonale b de $b \times b$. □

On a le théorème suivant :

Théorème II.10. (P. Freyd et A. Scedrov, [CA] ; voir aussi [TQAA] §3.4.) –

Considérons un topos $\mathcal{E}$ muni d'un objet b qui est une "borne" au sens que les sous-objets de b forment une famille génératrice de $\mathcal{E}$: tout objet de $\mathcal{E}$ est un sous-quotient d'un produit de sous-objets de b.

Alors l'ensemble ordonné $\mathcal{R}el\,(b)$ muni de sa structure de quantale modulaire suffit à reconstruire le topos $\mathcal{E}$ muni de sa borne b, considéré à équivalence près. □

2 Richesse et profondeur technique de la théorie des présentations des topos

Un topos $\mathcal{E}$ est toujours donné concrètement par un site de présentation $(\mathcal{C}, J)$. Si $\mathcal{E}$ est présenté comme le topos classifiant $\mathcal{E}_{\mathbb{T}}$ d'une théorie géométrique du premier ordre $\mathbb{T}$, cela signifie en particulier qu'il est défini par le site syntactique $(\mathcal{C}_{\mathbb{T}}, J_{\mathbb{T}})$ de $\mathbb{T}$. Et si $\mathcal{E}$ est présenté comme défini par une quantale modulaire Q, cela signifie concrètement qu'il est présenté par un site associé à Q.

Pour tout topos $\mathcal{E}$ présenté concrètement par un site $(\mathcal{C}, J)$, il est facile de déduire de cette présentation beaucoup d'autres sites qui présentent $\mathcal{E}$.

Le premier résultat général en ce sens est le "lemme de comparaison de Grothendieck" :

Lemme II.11. ([SGA4] exposé III, §4, théorème 4.1.) –

Soit $\mathcal{E}$ un topos présenté par un site $(\mathcal{C}, J)$.

Soit $\mathcal{C}'$ une sous-catégorie pleine de $\mathcal{C}$ qui est séparante au sens que deux morphismes $a_1 \rightrightarrows a_2$ de $\mathcal{C}$ sont égaux si et seulement si, pour tout objet b de $\mathcal{C}'$, les applications induites $\mathrm{Hom}\,(b, a_1) \rightrightarrows \mathrm{Hom}\,(b, a_2)$ *sont égales.*

Soit J' la topologie de $\mathcal{C}'$ induite par la topologie J de $\mathcal{C}$.

Alors le topos $\mathcal{E}$ est également présenté par le site $(\mathcal{C}', J')$. □

On a aussi le résultat général suivant qui recoupe partiellement le précédent :

Proposition II.12. ([SGA4] exposé IV, §1, corollaire 1.2.1.) –

Soit $\mathcal{E}$ un topos.

Soit $\mathcal{C}$ une sous-catégorie pleine de $\mathcal{E}$ constituée d'objets de $\mathcal{E}$ qui forment une famille génératrice : tout objet de $\mathcal{E}$ est un sous-quotient d'un produit d'objets de $\mathcal{C}$.

Soit J la topologie de $\mathcal{C}$ pour laquelle une famille de flèches de $\mathcal{C}$ de même but $\left(a_i \xrightarrow{f_i} a\right)_{i \in I}$ est dite couvrante lorsque $a = \bigvee_{i \in I} \mathrm{Im}(f_i)$.

Alors le topos $\mathcal{E}$ est présenté par le site $(\mathcal{C}, J)$. □

Toute présentation d'un topos $\mathcal{E}$ par un site $(\mathcal{C}, J)$ fait de $\mathcal{E}$ un sous-topos du topos $\mathcal{E}_{\mathcal{C}}$ des préfaisceaux sur la catégorie sous-jacente $\mathcal{C}$. Les topos de préfaisceaux sont donc particulièrement importants et il en est de même des théories géométriques $\mathbb{T}$ qui sont "de type préfaisceau" au sens que leur topos classifiant est un tel topos.

Or on a le résultat général :

Proposition II.13. (O.C. [YRFF] §2, remarque 2.12.) –

Soit $\mathbb{T}$ une théorie géométrique de type préfaisceau.

Alors son topos classifiant $\mathcal{E}_{\mathbb{T}}$ est équivalent au topos des préfaisceaux $\mathcal{E}_{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}$ sur l'opposée $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ de la catégorie $\mathcal{C}$ des modèles ensemblistes de $\mathbb{T}$ qui sont "finiment présentables" au sens de la définition I.23(i).

Remarque :

On a déjà dit que toutes les théories algébriques – telles que celles des groupes, des anneaux, des modules sur un anneau, etc. – sont de type préfaisceau, donc la proposition s'applique à elles.

En particulier, le topos classifiant de la théorie des groupes, des anneaux, des modules sur un anneau, etc., est équivalent au topos des préfaisceaux sur l'opposée de la catégorie des groupes, anneaux, modules sur un anneau, etc., de présentation finie. □

Après sa richesse, le second aspect fondamental de la théorie des représentations des topos est que le calcul ou l'expression d'invariants de topos $\mathcal{E}$ en termes de sites de présentation $(\mathcal{C}, J)$ de ces topos est souvent techniquement profond et subtil.

On le sait classiquement pour les invariants cohomologiques de topos $\mathcal{E}$ associés à des sites géométriques $(\mathcal{C}, J)$ tels que, par exemple, le site étale d'un schéma X. Les résultats les plus profonds sur les invariants cohomologiques de tels topos sont en effet ceux qui les relient directement à la géométrie sous-jacente, au premier rang desquels figure le théorème des points fixes de Grothendieck-Lefschetz :

Théorème II.14. (A. Grothendieck [FLRF] et [SGA5].) –

Soit X un schéma de type fini sur un corps fini $\mathbb{F}_q$.

Alors, si ℓ est un nombre premier inversible dans $\mathbb{F}_q$, la trace alternée de l'action de l'endomorphisme de Frobenius Fr_q agissant sur la cohomologie ℓ-adique à support compact de $\bar{X} = X \otimes_{\mathbb{F}_q} \mathbb{F}_q$

$$\sum_{i \geq 0} (-1)^i \cdot \mathrm{Tr}\left(\mathrm{Fr}_q, H_c^i(\bar{X}, \mathbb{Q}_\ell)\right)$$

est égale au nombre d'éléments de l'ensemble

$$X(\mathbb{F}_q)$$

des points du schéma X à coefficients dans $\mathbb{F}_q$. □

Remarque :

Un tel schéma X de type fini sur $\mathbb{F}_q$ peut être vu comme le préfaisceau $F : Y \mapsto F(Y) = \mathrm{Hom}\,(Y, X)$ sur la catégorie $\mathcal{C}$ des schémas affines de type fini sur $\mathbb{F}_q$. Si $\mathcal{C}$ est muni de la topologie J pour laquelle une famille de morphismes $Y_i \to Y$, $i \in I$, est couvrante si elle contient une sous-famille de morphismes étales dont les images recouvrent Y, alors le préfaisceau F représenté par X est même un faisceau.

On peut remarquer que le topos du "gros site étale" de X peut être défini uniquement en termes de F, $\mathcal{C}$ et J. Soit en effet $\mathcal{C}_F$ la "catégorie des éléments de F" qui a pour objets les paires (Y,a) constituées d'un objet Y de $\mathcal{C}$ et d'un élément $a \in F(Y)$ et pour flèches $(Y',a') \to (Y,a)$ les morphismes $u : Y' \to Y$ de $\mathcal{C}$ tels que $F(u)(a) = a'$. Soit d'autre part J_F la topologie de $\mathcal{C}_F$ induite par la topologie J de $\mathcal{C}$. Alors le topos $\mathcal{E}_F$ du site $(\mathcal{C}_F, J_F)$ s'identifie d'après le lemme de comparaison de Grothendieck II.11 au topos du gros site étale de X. Par conséquent, les espaces de cohomologie ℓ-adique à support compact $H^i_x(\bar{X}, \mathbb{Q}_\ell)$ munis de l'action de Fr_q peuvent être considérés comme des invariants du topos $\mathcal{E}_F$.

Or les définitions de la catégorie $\mathcal{C}_F$, de la topologie J_F et donc du topos $\mathcal{E}_F$ associé au site $(\mathcal{C}_F, J_F)$ gardent un sens pour tout faisceau F sur le site $(\mathcal{C}, J)$ et même pour tout préfaisceau F sur $\mathcal{C}$.

On peut se demander sous quelles conditions sur un faisceau ou un préfaisceau F il serait possible d'associer au topos $\mathcal{E}_F$ des invariants $H^i_c(\mathcal{E}_F, \mathbb{Q}_\ell)$, $i \in \mathbb{N}$, tels que :

- les $H^i_c(\mathcal{E}_F, \mathbb{Q}_\ell)$ sont des espaces vectoriels de dimension finie sur $\mathbb{Q}_\ell$, nuls en dehors d'un nombre fini d'indices i,
- ils sont munis d'actions de l'endomorphisme de Frobenius Fr_q,
- ils vérifient pour toute extension finie $\mathbb{F}_{q^n}$, $n \geq 1$, de $\mathbb{F}_q$ la formule de points fixes

$$\# F(\mathbb{F}_{q^n}) = \sum_{i \geq 0} (-1)^i \cdot \mathrm{Tr}\left(\mathrm{Fr}_q^n, H^i_c(\mathcal{E}_F, \mathbb{Q}_\ell)\right).$$

Le théorème de Grothendieck ci-dessus donne une réponse positive à cette question lorsque F est représentable par un schéma X de type fini sur $\mathbb{F}_q$.

Mais la question se pose pour des faisceaux ou préfaisceaux F qui ne sont pas représentables.

En voici un exemple important :

Considérons une courbe C lisse, projective et géométriquement connexe sur $\mathbb{F}_q$.

Etant donné un entier $r \geq 2$, on dispose du préfaisceau F sur $\mathcal{C}$ qui associe à tout objet Y l'ensemble des classes d'isomorphie de faisceaux ℓ-adiques lisses de rang r et géométriquement irréductibles sur $Y \times C$, modulo torsion par les faisceaux ℓ-adiques inversibles sur $\mathrm{Spec}\,(\mathbb{F}_q)$.

L'article [NIRF] de V. Drinfeld a montré dans le cas $r = 2$ que la série des nombres

$$F(\mathbb{F}_{q^n}), \quad n \geq 1,$$

a justement la forme générale qui serait impliquée par l'existence d'une formule de points fixes pour le préfaisceau F ou sa faisceautisation $\tilde{F}$.

Des variantes et généralisations du calcul de Drinfeld sont présentées dans l'article [CFA] de P. Deligne qui formule (à la fin du §1.3) le vœu de pouvoir considérer comme un espace l'ensemble des classes d'isomorphie de faisceaux ℓ-adiques lisses irréductibles de rang 2 (ou $r \geq 2$) sur la courbe C.

Les topos $\mathcal{E}_F$ ou $\mathcal{E}_{\tilde{F}}$ du préfaisceau F et de sa faisceautisation $\tilde{F}$ répondraient au moins en partie à ce vœu si l'on pouvait leur associer des invariants $H^i_c(\bullet, \mathbb{Q}_\ell)$ vérifiant une formule des points fixes comme précisé ci-dessus. $\square$

Un autre exemple très différent du même phénomène est fourni par le théorème I.15 qui exprime l'invariant d'un topos $\mathcal{E}$ constitué de l'ensemble ordonné de ses sous-topos en fonction aussi bien d'un site de présentation $(\mathcal{C}, J)$ de $\mathcal{E}$ que d'une théorie géométrique $\mathbb{T}$ dont le topos classifiant $\mathcal{E}_{\mathbb{T}}$ est équivalent à $\mathcal{E}$.

Au paragraphe I.5 nous avons donné cinq exemples d'expressions en termes de théories géométriques $\mathbb{T}$ de propriétés invariantes de leur topos classifiant $\mathcal{E}_{\mathbb{T}}$.

Ces propriétés invariantes des topos peuvent aussi être exprimées en termes de sites de définition.

On a d'abord :

Proposition II.15. –

Soit $(\mathcal{C}, J)$ un site et soit $\mathcal{E}$ le topos qu'il définit.

(i) *Appelons idéal J-fermé de $\mathcal{C}$ toute sous-catégorie pleine $\mathcal{C}'$ de $\mathcal{C}$ telle que :*

- *pour toute flèche $a \to b$ de $\mathcal{C}$, l'objet a est dans $\mathcal{C}'$ si l'objet b est dans $\mathcal{C}'$*
- *pour toute famille couvrante $a_i \to a$ d'un objet a de $\mathcal{C}$ telle que les a_i sont dans $\mathcal{C}'$, l'objet a est dans $\mathcal{C}'$.*

Alors le topos $\mathcal{E}$ est bivalent si et seulement si $\mathcal{C}$ contient exactement deux idéaux J-fermés :

- *l'idéal égal à $\mathcal{C}$ tout entière,*
- *l'idéal minimal composé des objets pour lesquels la famille vide est couvrante.*

(ii) (O.C. [DCT] §2, p. 2122) *Disons qu'un crible S d'un objet a de $\mathcal{C}$ est J-fermé si, pour toute flèche $f : b \to a$ de $\mathcal{C}$ et toute famille couvrante $f_i : b_i \to b$ de b telle que les $f \circ f_i : b_i \to a$ soient dans S, f est aussi dans S.*

D'autre part, notons pour tout objet a de $\mathcal{C}$

$$R_a = \{f : b \to a \mid \varnothing \in J(b)\}.$$

Alors le topos $\mathcal{E}$ est Booléen si et seulement si, pour tout crible J-fermé S d'un objet a de $\mathcal{C}$, le crible

$$\{f : b \to a \mid f \in S \quad ou \quad f^*(S) = R_b\}$$

est J-couvrant.

(iii) (O.C. [DCT] §2, p. 2121) *Le topos $\mathcal{E}$ est de De Morgan si et seulement si, pour tout crible J-fermé S d'un objet a de $\mathcal{C}$, le crible*

$$\{f : b \to a \mid f^*(S) = R_b \quad ou \quad \forall\, g : c \to b,\ g^*(f^*(S)) = R_c \Rightarrow g \in R_b\}$$

est J-couvrant. □

Dans le cas des espaces topologiques, cet énoncé se spécialise en les termes suivants :

Corollaire II.16. –

Soit $\mathcal{E}$ le topos associé à un espace topologique X. Alors :

(i) *$\mathcal{E}$ est bivalent si et seulement si la topologie de X est triviale c'est-à-dire comporte seulement deux ouverts, $\varnothing$ et X.*

(ii) *$\mathcal{E}$ est Booléen si et seulement si X est quasi-discret au sens que tout ouvert de X est fermé.*

(iii) *$\mathcal{E}$ est de De Morgan si et seulement si X est extrêmement disconnexe au sens que la clôture $\bar{U}$ de tout ouvert U de X est encore un ouvert.* □

La même proposition II.15 se spécialise en termes totalement différents dans le cas des topos de préfaisceaux :

Corollaire II.17. –

Soit $\mathcal{E}$ le topos des préfaisceaux sur une catégorie $\mathcal{C}$. Alors :

(i) *$\mathcal{E}$ est bivalent si et seulement si, pour tous objets a et b de $\mathcal{C}$, il existe au moins une flèche $a \to b$ et une flèche $b \to a$.*

(ii) *$\mathcal{E}$ est Booléen si et seulement si $\mathcal{C}$ est un groupoïde, autrement dit si toutes les flèches de $\mathcal{C}$ sont des isomorphismes.*

(iii) *$\mathcal{E}$ est de De Morgan si et seulement si pour toutes flèches $b \xrightarrow{f} a$ et $b' \xrightarrow{f'} a$ de même but, il existe dans $\mathcal{C}$ deux flèches $c \xrightarrow{g} b$ et $c \xrightarrow{g'} b'$ de même source telles que $f \circ g = f' \circ g'$.* □

De même, la propriété d'atomicité d'un topos s'exprime en termes de sites de la manière suivante :

Théorème II.18. (O.C. [SCGI] §4, théorème 4.4.) –

Soit $(\mathcal{C}, J)$ un site et soit $\mathcal{E}$ le topos qu'il définit.

Pour toute flèche $b \xrightarrow{f} a$ de $\mathcal{C}$, notons (f) le crible de a qu'elle engendre c'est-à-dire l'ensemble des flèches $c \to a$ de but a qui se factorisent en $c \longrightarrow b \xrightarrow{f} a$.

Alors le topos $\mathcal{E}$ est atomique si et seulement si tout objet a de $\mathcal{C}$ admet un crible couvrant engendré par des flèches $f : b \to a$ telles que :

- *$\varnothing \notin J(b)$,*
- *pour toute flèche $g : b' \to a$ telle que $g^*((f)) \in J(b')$, on a $\varnothing \in J(b')$ ou bien $f^*((g)) \in J(b)$.* □

Ce théorème se spécialise en les termes très différents suivants dans le cas des espaces topologiques et dans celui des topos de préfaisceaux :

Corollaire II.19. –

(i) *Le topos d'un espace topologique X est atomique si et seulement si tout ouvert de X est réunion disjointe d'ouverts non vides minimaux.*

(ii) *Le topos des préfaisceaux sur une catégorie $\mathcal{C}$ est atomique si et seulement si il est Booléen c'est-à-dire si la catégorie $\mathcal{C}$ est un groupoïde.* □

Afin de donner un critère pour que le topos $\mathcal{E}_{\mathcal{C},J}$ d'un site $(\mathcal{C}, J)$ soit de type préfaisceau, on a besoin de la définition suivante :

Définition II.20. –

Etant donné un site $(\mathcal{C}, J)$, considérons le foncteur

$$\ell : \mathcal{C} \xrightarrow{y} \mathcal{E}_{\mathcal{C}} \longrightarrow \mathcal{E}_{\mathcal{C},J}$$

composé du foncteur de Yoneda $y : \mathcal{C} \to \mathcal{E}_{\mathcal{C}}$ suivi du foncteur de faisceautisation des préfaisceaux $\mathcal{E}_{\mathcal{C}} \to \mathcal{E}_{\mathcal{C},J}$.

(i) *On dit que la topologie J de $\mathcal{C}$ est sous-canonique si le foncteur ℓ est pleinement fidèle ou, ce qui est équivalent, si tout préfaisceau représentable de $\mathcal{C}$ est un faisceau.*

(ii) *Pour tout crible S d'un objet a de $\mathcal{C}$, on appelle ℓ-fermeture de S le cribe*

$$\bar{S} = \{f : b \longrightarrow a \mid \textit{il existe } (g : b' \to a) \in S \textit{ telle que } \ell(f) \textit{ se factorise à travers } \ell(g)\}.$$

(iii) *Un crible S est dit ℓ-fermé si $\bar{S} = S$.*

Remarque :

Si la topologie J est sous-canonique, tout crible est ℓ-fermé. □

On peut maintenant énoncer :

Théorème II.21. (O.C. [SCGI] §6, théorème 6.4.) –

Le topos $\mathcal{E}_{\mathcal{C},J}$ d'un site $(\mathcal{C}, J)$ est équivalent à un topos de préfaisceaux si et seulement si, pour tout objet a de $\mathcal{C}$, il existe une famille de flèches composables

$$c_i \xrightarrow{g_i} b_i \xrightarrow{f_i} a, \quad i \in I,$$

telle que :

- *le crible engendré par la famille des $f_i \circ g_i$ est couvrant,*
- *pour tout crible ℓ-fermé S d'un b_i qui est contenu dans le crible (g_i) engendré par g_i, on a l'implication*

$$g_i^*(S) \in J(c_i) \Rightarrow g_i \in S.$$

□

Ce théorème se spécialise de la manière suivante dans le cas des espaces topologiques :

Corollaire II.22. –

Le topos d'un espace topologique X est de type préfaisceau si et seulement si X admet une base d'ouverts $\mathcal{B}$ dont chaque élément est "supercompact" : cela signifie que, dans $\mathcal{B}$, le seul crible couvrant de tout ouvert est le crible maximal engendré par l'identité de cet ouvert. □

Revenons aux topos atomiques bivalents. Ils sont particulièrement intéressants puisque, d'après la proposition I.22, toute théorie atomique $\mathbb{T}$ classifiée par un tel topos est complète au sens de la logique du premier ordre.

Théorème II.23. –

Considérons une catégorie $\mathcal{C}$ qui possède la propriété d'amalgamation : pour toutes flèches $a \xrightarrow{f} b$ et $a \xrightarrow{f'} b'$ de même source, il existe deux flèches $b \xrightarrow{g} c$ et $b' \xrightarrow{g'} c$ de même but telles que $g \circ f = g' \circ f'$.

(i) (M. Barr et R. Diaconescu [AT].) *Il existe sur la catégorie opposée $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ une topologie J, appelée "topologie atomique", pour laquelle les cribles couvrants de tout objet sont les cribles non vides.*

De plus, le topos associé $\mathcal{E} = \mathcal{E}_{\mathcal{C},J}$ est atomique.

(ii) (O.C. [FCTP] §3, théorème 3.6 et lemme 3.7.) *Ce topos atomique $\mathcal{E}$ est bivalent si et seulement si la catégorie $\mathcal{C}$ possède la propriété de plongement conjoint : tous objets b, b' de $\mathcal{C}$ admettent deux flèches $b \to c$ et $b' \to c$ de même but.*

(iii) (O.C. [TGT] §4.1, théorème 4.1.) *Le foncteur canonique*

$$\ell : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathcal{E}_{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}} \longrightarrow \mathcal{E}_{\mathcal{C}^{\mathrm{op}},J} = \mathcal{E}$$

est pleinement fidèle si et seulement si toute flèche $a \xrightarrow{f} b$ de $\mathcal{C}$ est un monomorphisme strict : cela signifie qu'une flèche $a' \xrightarrow{f'} b$ se factorise, de manière nécessairement unique, à travers f si et seulement si on a $g \circ f' = h \circ f'$ pour toute paire de flèches $g, h : b \rightrightarrows c$ vérifiant $g \circ f = h \circ f$.

Dans ce cas, les objets du topos atomique $\mathcal{E}$ images des objets de $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ sont des atomes.

Enfin, il est possible d'expliciter directement et constructivement la sous-catégorie pleine des objets atomiques de $\mathcal{E}$ en fonction de la catégorie $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ (voir [TGT], §4.3, théorème 4.15).

(iv) (O.C. [YRFF] §2, corollaire 2.20.) *Dans ces conditions, les points du topos $\mathcal{E} = \mathcal{E}_{\mathcal{C}^{\mathrm{op}},J}$ s'identifient aux objets u de la* ind-*complétion* $\mathrm{Ind}(\mathcal{C})$ *de $\mathcal{C}$ qui sont "$\mathcal{C}$-homogènes" au sens que toute paire de flèches $a \to b$ de $\mathcal{C}$ et $a \to u$ de* $\mathrm{Ind}(\mathcal{C})$ *se complète en un triangle commutatif :*

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r] \arrow[d] & u \\ b \arrow[ur, dashed] & \end{tikzcd}$$

(v) (O.C. [TGT] §3.2, Théorème 3.5.) *Supposons enfin qu'un tel objet $\mathcal{C}$-homogène u de* $\mathrm{Ind}(\mathcal{C})$ *est*

- *$\mathcal{C}$-universel au sens que tout objet a de $\mathcal{C}$ admet une flèche $a \to u$,*
- *$\mathcal{C}$-ultrahomogène au sens que toute paire de flèches $a \rightrightarrows u$ d'un objet a de $\mathcal{C}$ vers u sont transformées l'une dans l'autre par un automorphisme de u.*

Soit G le groupe des automorphismes de u, muni de la topologie dont une base de sous-groupes ouverts est constituée des fixateurs des flèches $a \to u$ des objets a de $\mathcal{C}$ vers u.

Alors le foncteur

$$\begin{array}{ccc} a & \longmapsto & \mathrm{Hom}\,(a,u) \\ \mathcal{C}^{\mathrm{op}} & \longrightarrow & BG \end{array}$$

induit une équivalence du topos $\mathcal{E} = \mathcal{E}_{\mathcal{C}^{\mathrm{op}},J}$ vers le topos classifiant BG du groupe prodiscret G si bien que $\mathcal{E}$ est galoisien.

Exemples :

Les conditions de ce théorème sont vérifiées par de très nombreuses catégories classiques :

(i) La catégorie $\mathcal{C}$ des extensions finies séparables d'un corps K :

Dans ce cas, les objets $\mathcal{C}$-homogènes de $\mathrm{Ind}(\mathcal{C})$ sont les clôtures séparables $\bar{K}$ de K. ils sont automatiquement universels et ultrahomogènes et leurs groupes d'automorphismes sont profinis. La catégorie $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ s'identifie à la catégorie des objets atomiques du topos galoisien $\mathcal{E}$.

(ii) Plus généralement, la catégorie $\mathcal{C}$ opposée de la catégorie $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ des revêtements finis étales connexes d'un schéma connexe X :

Dans ce cas, tout point de X à coefficients dans un corps algébriquement clos définit un objet $\mathcal{C}$-homogène de $\mathrm{Ind}(\mathcal{C})$ qui est universel et ultrahomogène et dont le groupe des automorphismes est profini. La catégorie $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ s'identifie encore à la catégorie des objets atomiques du topos galoisien $\mathcal{E}$.

(iii) Plus généralement encore, la catégorie $\mathcal{C}$ opposée à la catégorie $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ des objets indécomposables d'une catégorie galoisienne (au sens de Grothendieck) $\mathcal{G}$:

Dans ce cas, les objets $\mathcal{C}$-homogènes, universels et ultrahomogènes de $\mathrm{Ind}(\mathcal{C})$ sont les "foncteurs fibres" de $\mathcal{G}$ au sens de Grothendieck.

Leurs groupes des automorphismes sont profinis. La catégorie $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ s'identifie toujours à la catégorie des objets atomiques du topos galoisien $\mathcal{E}$.

(iv) La catégorie $\mathcal{C}$ opposée à la catégorie $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ des recouvrements connexes d'un espace topologique connexe et localement contractile X :

Dans ce cas, tout point de X définit un objet $\mathcal{C}$-homogène, universel et ultrahomogène de $\mathrm{Ind}\,(\mathcal{C})$ dont le groupe des automorphismes est discret. Encore une fois, la catégorie $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ s'identifie à la catégorie des objets atomiques du topos galoisien $\mathcal{E}$.

(v) La catégorie $\mathcal{C}$ des ensembles finis et de leurs plongements mutuels :

Dans ce cas, les objets $\mathcal{C}$-homogènes de $\mathrm{Ind}\,(\mathcal{C})$ sont les ensembles infinis, ils sont automatiquement universels et ultrahomogènes. Le topos $\mathcal{E}$ est le topos de Schanuel : il est équivalent au classifiant BG du groupe des automorphismes $G = \mathrm{Aut}\,(I)$ de tout ensemble infini I, muni de la topologie définie par les fixateurs des familles finies d'éléments de I.

Encore une fois, $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ s'identifie à la catégorie des objets atomiques du topos galoisien $\mathcal{E}$.

(vi) Le théorème s'applique encore à des exemples entièrement nouveaux où $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ s'identifie à une sous-catégorie pleine de la catégorie des objets atomiques du topos galoisien $\mathcal{E}$ sans se confondre avec elle.

Autrement dit, le théorème dit que $\mathcal{C}$ ou $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ se plonge naturellement comme sous-catégorie pleine d'une catégorie plus grosse dont les objets peuvent être appelés les "imaginaires".

Voici trois exemples de telles catégories $\mathcal{C}$:

- la catégorie des groupes finis et de leurs plongements,
- la catégorie des graphes finis et de leurs plongements,
- la catégorie des algèbres de Boole finies et de leurs plongements.

Dans le premier cas, la catégorie $\mathrm{Ind}\,(\mathcal{C})$ est celle des groupes localement finis (c'est-à-dire tels que les sous-groupes engendrés par un nombre fini de leurs éléments sont toujours finis) et de leurs plongements. Il est bien connu qu'il existe des groupes localement finis H de toute cardinalité infinie tels que tout groupe fini G se plonge dans H et que toute paire de plongements $G \rightrightarrows H$ soient changés l'un dans l'autre par un automorphisme intérieur de H. En particulier, il existe un tel groupe H dénombrable, et on peut montrer de surcroît qu'il est unique à isomorphisme près ; il est appelé le groupe de Philip Hall.

Dans le second cas, la catégorie $\mathrm{Ind}\,(\mathcal{C})$ est celle des graphes et de leurs plongements. Le graphe aléatoire (ou graphe de Rado) est $\mathcal{C}$-homogène, universel et ultrahomogène.

Dans le troisème cas, la catégorie $\mathrm{Ind}\,(\mathcal{C})$ est celle des algèbres de Boole et de leurs plongements. A isomorphisme près il existe une unique algèbre de Boole dénombrable et sans atome ; comme objet de $\mathrm{Ind}\,(\mathcal{C})$ elle est $\mathcal{C}$-homogène, universelle et ultrahomogène.

Ainsi les catégories $\mathcal{C}$ des groupes finis, graphes finis et algèbres de Boole finies et de leurs plongements se plongent naturellement et constructivement comme sous-catégories pleines de catégories plus grosses de "groupes finis imaginaires", "graphes finis imaginaires" et "algèbres de Booles finies imaginaires" dont les opposées sont les catégories des atomes des topos galoisiens associés $\mathcal{E}_{\mathcal{C}^{\mathrm{op}},J}$. □

3 Le caractère calculatoire des topos

Le passage d'un site $(\mathcal{C}, J)$ à son topos associé $\mathcal{E}_{\mathcal{C},J}$ peut être vu comme une opération de complétion qui envoie le monde "réel" du site $(\mathcal{C}, J)$ vers le monde "imaginaire" du topos $\mathcal{E}_{\mathcal{C},J}$ qui constitue un environnement propre au calcul.

Le caractère calculatoire d'un tel topos $\mathcal{E} = \mathcal{E}_{\mathcal{C},J}$ réside d'abord dans le fait que

- $\mathcal{E}$ a des limites et colimites (petites) arbitraires,
- $\mathcal{E}$ a des exponentielles (ou $\mathcal{H}om$ internes)

$$(a,b) \longmapsto \mathcal{H}om\,(a,b)$$

  définies comme représentant les foncteurs contravariants

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{E}^{\mathrm{op}} & \longrightarrow & \mathrm{Ens} \\ x & \longmapsto & \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(a \times x, b). \end{array}$$

C'est en particulier grâce à ce fait que les catégories de modules internes $\mathcal{M}od\,(\mathcal{E},\mathcal{O})$ des topos annelés sont des catégories abéliennes de Grothendieck et sont munies des deux opérations internes $\oplus$ et $\mathcal{H}om\,(\bullet,\bullet)$ puis que celles-ci admettent des opérations dérivées $\otimes_L$ et $R\,\mathcal{H}om\,(\bullet,\bullet)$.

C'est aussi pourquoi tout morphisme de topos annelés

$$f = (f^*, f_*) : (\mathcal{E}_1, \mathcal{O}_1) \longrightarrow (\mathcal{E}_2, \mathcal{O}_2)$$

définit un foncteur $f^* : \mathcal{M}od\,(\mathcal{E}_2,\mathcal{O}_2) \to \mathcal{M}od\,(\mathcal{E}_1,\mathcal{O}_1)$ adjoint à gauche de $f_* : \mathcal{M}od\,(\mathcal{E}_1,\mathcal{O}_1) \to \mathcal{M}od\,(\mathcal{E}_2,\mathcal{O}_2)$ puis deux foncteurs dérivés Rf^*, Rf_* et, dans certains cas, deux foncteurs supplémentaires $Rf_!, Rf^!$ duaux des précédents.

Une autre structure supplémentaire dont les topos sont toujours munis consiste en un objet invariant appelé le "classificateur des sous-objets" :

Théorème II.24. (W. Lawvere ; voir [TTB] §3.3, théorème 3.11(v), et [SGL] §III.7.) –
(i) *Soit $\mathcal{E}$ un topos arbitraire.*
Alors le foncteur contravariant

$$\begin{array}{ccl} \mathcal{E}^{\mathrm{op}} & \longrightarrow & \mathrm{Ens} \\ a & \longmapsto & \{\textit{sous-objets de } a\} \end{array}$$

qui associe à tout objet a de $\mathcal{E}$ l'ensemble de ses sous-objets est représentable par un objet $\Omega_{\mathcal{E}} = \Omega$ de $\mathcal{E}$, bien défini à unique isomorphisme près, appelé le "classificateur des sous-objets".

(ii) *Si le topos $\mathcal{E}$ est représenté par un site $(\mathcal{C}, J)$, son classificateur des sous-objets Ω s'identifie au faisceau*

$$\begin{array}{ccl} \mathcal{C}^{\mathrm{op}} & \longrightarrow & \mathrm{Ens} \\ a & \longmapsto & \{\textit{cribles } J\textit{-fermés de } a\} \end{array}$$

qui associe à tout objet a de $\mathcal{C}$ l'ensemble des cribles S de a qui sont "J-fermés" au sens que, pour toute flèche $b \xrightarrow{f} a$ d'un objet b de $\mathcal{C}$ vers a, on a l'implication

$$f^*(S) \in J(b) \Rightarrow f \in S.$$

(iii) *En particulier, si $\mathcal{E}$ est le topos des préfaisceaux sur une catégorie $\mathcal{C}$, son classificateur des sous-objets Ω est le préfaisceau*

$$\begin{array}{ccl} \mathcal{C}^{\mathrm{op}} & \longrightarrow & \mathrm{Ens} \\ a & \longmapsto & \{\textit{cribles de } a\}. \end{array}$$

Remarque :

Si $\mathcal{E} = \mathrm{Ens}$ est le topos des ensembles, son classificateur des sous-objets est l'ensemble à 2-éléments

$$\Omega = \{0, 1\}.$$

□

Il existe aussi un calcul externe sur les topos, rendu possible par le fait que

- la 2-catégorie des topos a des limites finies et des colimites arbitraires (qui formalisent en particulier les constructions par des "données de descente"),
- elle a des "limites pondérées finies".

4 La logique interne des topos

On appelle logique interne d'un topos $\mathcal{E}$ l'ensemble des propriétés de son classificateur des sous-objets Ω muni de sa structure d'algèbre de Heyting interne à $\mathcal{E}$ définie par le lemme suivant :

Lemme II.25. (Voir par exemple [TTB] §3.3, théorème 3.12, et [SGL] §III.8.) –

Dans un topos $\mathcal{E}$, les opérations de Heyting sur les sous-objets d'un objet a de $\mathcal{E}$

$$\begin{array}{ccc} (a_1,a_2) & \longmapsto & a_1 \vee a_2, \\ (a_1,a_2) & \longmapsto & a_1 \wedge a_2, \\ (a_1,a_2) & \longmapsto & (a_1 \Rightarrow a_2), \\ a_1 & \longmapsto & \neg a_1 = (a_1 \Rightarrow \varnothing), \end{array}$$

commutent avec les applications d'images réciproques des sous-objets par les flèches de $\mathcal{E}$

$$b \longrightarrow a.$$

Par conséquent, ces opérations peuvent être vues comme des morphismes dans $\mathcal{E}$ de but le classificateur Ω des sous-objets

$$\begin{array}{ccccc} \vee & : & \Omega \times \Omega & \longrightarrow & \Omega, \\ \wedge & : & \Omega \times \Omega & \longrightarrow & \Omega, \\ \Rightarrow & : & \Omega \times \Omega & \longrightarrow & \Omega, \\ \neg & : & \Omega & \longrightarrow & \Omega, \end{array}$$

qui font de Ω une algèbre de Heyting interne à $\mathcal{E}$. □

On peut en effet faire des mathématiques dans le cadre de n'importe quel topos $\mathcal{E}$ comme on est habitué à le faire dans le cadre de la catégorie Ens des ensembles : dans ce cadre, les conjonctions $\wedge$, les disjonctions $\vee$, les quantificateurs $\forall$ et $\exists$, les implications $\Rightarrow$ et les négations $\neg$ ont le sens précisé dans la définition II.6(iii) pour n'importe quel topos. Alors les règles d'inférence qu'il est possible d'appliquer dans les raisonnements dépendent des propriétés du classificateur $\Omega = \Omega_{\mathcal{E}}$ du topos $\mathcal{E}$ dans le cadre duquel on se place et des opérations de Heyting de Ω.

En particulier, on est amené à appeler "valeurs de vérités" de la logique interne de $\mathcal{E}$ les sections de la flèche de structure du classificateur Ω vers l'objet final de $\mathcal{E}$.

Dans le cas où $\mathcal{E}$ = Ens est le topos des ensembles, Ω est l'ensemble à deux éléments $\{0,1\}$ et l'objet final est le singleton $\{0\}$ si bien que la logique interne à Ens admet seulement deux valeurs de vérité, le vrai et le faux. Mais, dans le cas général, il peut exister une infinité de telles "valeurs de vérité".

Parmi les notions importantes attachées aux classificateurs des sous-objets des topos figure la suivante :

Définition II.26. –

Soient $\mathcal{E}$ un topos et Ω son classificateur des sous-objets.

On appelle topologie de Lawvere-Tierney sur $\mathcal{E}$ tout endomorphisme

$$j : \Omega \longrightarrow \Omega,$$

consistant à associer à tout sous-objet a_1 de tout objet a de $\mathcal{E}$ un sous-objet de a

$$j(a_1) = \bar{a}_1,$$

qui vérifie les trois propriétés suivantes :

(1) *On a* $\mathrm{id}_\Omega \leq j$ *c'est-à-dire, pour tout sous-objet* a_1 *d'un objet* a *de* $\mathcal{E}$*,*

$$a_1 \leq \bar{a}_1.$$

(2) *On a* $j \circ j = j$ *c'est-à-dire, dans les mêmes conditions,*

$$\bar{\bar{a}}_1 = \bar{a}_1.$$

(3) *L'endomorphisme* j *commute avec l'opération* $\wedge$*, ce qui signifie que, pour tous sous-objets* a_1 *et* a_2 *d'un objet* a*, on a*

$$\overline{a_1 \wedge a_2} = \bar{a}_1 \wedge \bar{a}_2.$$

Exemple :

Dans tout topos $\mathcal{E}$, l'endomorphisme

$$\Omega_\mathcal{E} \longrightarrow \Omega_\mathcal{E}$$

défini par la double négation

$$a_1 \longmapsto \neg(\neg a_1)$$

est une topologie de Lawvere-Tierney. □

Si un topos $\mathcal{E}$ est muni d'une topologie de Lawvere-Tierney

$$j : \Omega \longrightarrow \Omega,$$

on dit qu'un sous-objet a_1 d'un objet a de $\mathcal{E}$ est dense dans a si

$$\bar{a}_1 = a.$$

Théorème II.27. (W. Lawvere et M. Tierney ; voir [TTB] §5.4, théorème 5.34, et [SE] A4.3.) – *Soit* $\mathcal{E}$ *un topos.*

(i) *Pour toute topologie de Lawvere-Tierney de* $\mathcal{E}$

$$j : \Omega \longrightarrow \Omega,$$

soit $\mathcal{E}_j$ *la sous-catégorie pleine de* $\mathcal{E}$ *constituée des objets* a *tels que, pour tout objet* b *de* $\mathcal{E}$ *et tout sous-objet dense* b' *de* b*, l'application*

$$\mathrm{Hom}_\mathcal{E}(b, a) \longrightarrow \mathrm{Hom}_\mathcal{E}(b', a)$$

est bijective.

Alors $\mathcal{E}_j$ *est un sous-topos de* $\mathcal{E}$*.*

Autrement dit, $\mathcal{E}_j$ *est un topos et le foncteur de plongement*

$$\mathcal{E}_j \longrightarrow \mathcal{E}$$

admet un adjoint à gauche qui est exact.

(ii) *L'application*

$$j \longmapsto \mathcal{E}_j$$

définit une bijection de l'ensemble des topologies de Lawvere-Tierney de $\mathcal{E}$ *sur l'ensemble des sous-topos de* $\mathcal{E}$*.*

Remarques :

(i) Il résulte de ce théorème combiné avec le théorème I.15(i) que si $\mathcal{E}$ est présenté par un site $(\mathcal{C}, J)$, se donner une topologie de Lawvere-Tierney $j : \Omega \to \Omega$ équivaut à se donner une topologie de Grothendieck J' de $\mathcal{C}$ qui contient J.

(ii) Il résulte de ce théorème combiné avec le théorème I.15(ii) que si $\mathcal{E}$ est le topos classifiant d'une théorie géométrique du premier ordre $\mathbb{T}$, se donner une topologie de Lawvere-Tierney $j : \Omega \to \Omega$ équivaut à se donner une théorie géométrique $\mathbb{T}'$ quotient de $\mathbb{T}$. □

En particulier, pour tout topos $\mathcal{E}$, le topos $\mathcal{E}_{\neg\neg}$ déjà introduit au paragraphe I.6 est le sous topos de $\mathcal{E}$ associé à la topologie de Lawvere-Tierney définie par la double négation $a_1 \mapsto \neg(\neg a_1)$.

De la même façon, on peut expliciter la topologie de Lawvere-Tierney sur un topos $\mathcal{E}$ qui correspond à la construction du sous-topos "Demorganisé" de $\mathcal{E}$ introduit au paragraphe I.6.

Plus généralement, on peut étudier les classes de topos dont la logique interne vérifie n'importe quelle famille de règles d'inférences au moins aussi forte que la famille des règles de la "topologie intuitioniste" commune à tous les topos. Pour toute telle famille de règles d'inférence, on peut chercher à caractériser en termes de sites de présentation $(\mathcal{C}, J)$ ou de théories géométriques $\mathbb{T}$ les topos $\mathcal{E} = \mathcal{E}_{\mathcal{C},J}$ ou $\mathcal{E} = \mathcal{E}_{\mathbb{T}}$ dont la logique interne vérifie ces règles.

Il est également possible de caractériser les morphismes de topos

$$f = (f^*, f_*) : \mathcal{E}_1 \longrightarrow \mathcal{E}_2$$

dont la composante d'image réciproque f^* est compatible avec les négations $\neg$ ou avec les implications $\Rightarrow$.

5 Souplesse de la logique

La logique en tant que telle est non structurée.

Toute expression formelle (indépendamment de toute considération de vrai ou de faux) est un objet d'étude de la logique. Il est donc très facile d'engendrer des objets logiques, en particulier des théories : toute famille d'axiomes définit une théorie.

Ainsi, l'ontologie mathématique de la logique est beaucoup plus large que celle de tout autre domaine des mathématiques.

Néanmoins, la théorie des topos classifiants permet de structurer un contenu logique de façon maximale : le topos classifiant $\mathcal{E}_{\mathbb{T}}$ d'une théorie géométrique du premier ordre $\mathbb{T}$ est un objet topologique qui incarne tout le contenu de sens de $\mathbb{T}$ et seulement lui.

Il y a donc une dualité entre

- le niveau non structuré de la syntaxe : les théories $\mathbb{T}$,
- le niveau structuré (par les propriétés des topos) de la sémantique représentée universellement par les topos classifiants $\mathcal{E}_{\mathbb{T}}$.

Modifier une structure algébrique est en général délicat. En revanche, modifier une théorie logique en ajoutant, retranchant ou altérant des axiomes ou des éléments de son langage est très facile.

Pourtant, il y a correspondance entre notions et opérations logiques d'une part, notions et opérations dans et sur les topos d'autre part. Cela permet d'exploiter la flexibilité de la logique pour fabriquer des structures ayant un ensemble de propriétés souhaitées.

Par exemple, des structures présentées en termes de générateurs et relations peuvent être construites via les topos classifiants. Un tel procédé de construction a été récemment employé pour réinterpréter et généraliser la construction de Nori en théorie des motifs. Pour le présenter on a d'abord besoin de la définition suivante :

Définition II.28. (Voir [TTB] §4.1, §6.1 et §6.2.) –

Soit Σ *une signature du premier ordre au sens de la définition* II.5(i).

(i) *On appelle formules régulières de* Σ *celles des formules géométriques qui se déduisent des "termes" (au sens de la définition* II.5(ii)*) en ajoutant la formule du vrai* $\top$ *et en autorisant des conjonctions finitaires* $\wedge$ *ainsi que le quantificateur existentiel* $\exists$ *portant sur une partie des variables.*

On appelle séquents réguliers de Σ *les implications*

$$\varphi \vdash_{\vec{x}} \psi$$

entre deux formules régulières φ *et* ψ *de* Σ *dans le contexte d'une même famille finie* $\vec{x}$ *de variables.*

(ii) *On appelle théorie régulière dans la signature* Σ *un ensemble* $\mathbb{T}$ *de séquents réguliers de* Σ*, baptisés les axiomes de* $\mathbb{T}$.

(iii) *Si* $\mathbb{T}$ *est une théorie régulière dans la signature* Σ*, on appelle catégorie syntactique régulière de* $\mathbb{T}$ *la catégorie* $\mathcal{C}_{\mathbb{T}}^{\mathrm{reg}}$ *dont*

- *les objets sont les classes d'équivalence de formules régulières* $\varphi(\vec{x})$ *dans la signature* Σ,
- *les morphismes entre tels objets* $\varphi(\vec{x}) \to \psi(\vec{y})$ *sont les classes d'équivalence de formules régulières* $\theta(\vec{x},\vec{y})$ *qui sont "démontrablement fonctionnelles" (au même sens que dans le théorème* II.7(ii)*).*

De plus, on appelle topologie syntactique régulière la topologie $J_{\mathbb{T}}^{\mathrm{reg}}$ *de* $\mathcal{C}_{\mathbb{T}}^{\mathrm{reg}}$ *pour laquelle une famille de morphismes*

$$\varphi_i(\vec{x}_i) \xrightarrow{\theta_i(\vec{x}_i,\vec{y})} \psi(\vec{y})\,, \quad i \in I,$$

est couvrante s'il existe un indice $i \in I$ *tel que le séquent*

$$\psi \vdash_{\vec{y}} (\exists\, \vec{x}_i)\, \theta_i$$

soit démontrable dans $\mathbb{T}$.

Remarques :

(i) Ainsi, les formules régulières diffèrent des formules géométriques en ceci qu'elles excluent la formule du faux $\perp$ et les disjonctions finitaires ou infinitaires $\vee$.

(ii) Toute théorie régulière $\mathbb{T}$ est en particulier une théorie géométrique et admet en tant que telle un topos classifiant $\mathcal{E}_{\mathbb{T}}$ associé à son site syntactique $(\mathcal{C}_{\mathbb{T}}, J_{\mathbb{T}})$. On montre que $\mathcal{E}_{\mathbb{T}}$ est équivalent au topos associé au site syntactique régulier $(\mathcal{C}_{\mathbb{T}}^{\mathrm{reg}}, J_{\mathbb{T}}^{\mathrm{reg}})$ de $\mathbb{T}$. □

On peut alors proposer le procédé de construction suivant :

Définition II.29. (O.C. [SCNM] §2.2, lemme 2.4.) –

Soit

$$T : D \longrightarrow A_R$$

une représentation d'un carquois D *dans la catégorie* A_R *des* R*-modules sur un anneau* R *(ou plus généralement dans n'importe quelle catégorie abélienne* R*-linéaire* A_R*).*

(i) *On attache au carquois* D *et à l'anneau* R *la signature* Σ *qui consiste en*

- *des sortes associées à chaque objet* d *de* D*,*

- *des symboles de fonctions* $d \xrightarrow{f} d'$ *associés à chaque flèche* f *de* D, $dd \to d$ *et* $\varnothing \to d$ *associés à chaque objet* d *de* D *(qui désigneront les lois d'addition et les éléments* 0*) et* $d \to d$ *associés à chaque* d *et à chaque scalaire* $a \in R$ *(qui désigneront les lois de multiplication par les scalaires),*
- *aucun symbole de relation.*

(ii) *On appelle théorie régulière de* T *la théorie régulière de signature* Σ *dont les axiomes sont les séquents réguliers*

$$\varphi \vdash_{\vec{x}} \psi$$

qui sont vérifiés par la représentation T *du carquois* D.

(iii) *On associe à* T *la catégorie syntactique régulière* $\mathcal{C}_{\mathbb{T}}^{\mathrm{reg}} = \mathcal{C}_T$ *de la théorie régulière* $\mathbb{T}$ *de* T. *C'est une catégorie additive,* R*-linéaire et régulière au sens que :*

- *elle possède des limites finies arbitraires,*
- *toute flèche* $a \to b$ *de cette catégorie a une image et la formation des images commute aux changements de base.*

(iv) *On associe à* T *la catégorie effectivisée* $\mathcal{C}_T^{\mathrm{eff}} = A_T$ *déduite de* $\mathcal{C}_T$ *en ajoutant formellement les quotients des relations d'équivalence. Ainsi :*

- *Les objets de* A_T *sont les paires* (a,b) *constituées d'un objet* a *de* $\mathcal{C}_T$ *et d'un sous-objet* $b \rightarrowtail a \times a$ *qui est une relation d'équivalence.*
- *Les morphismes* $(a,b) \to (a',b')$ *de* A_T *sont les relations* $r \rightarrowtail a \times a'$ *telles que* $r \circ b = r = b' \circ r$, $b \le r^{\mathrm{op}} \circ r$ *et* $r \circ r^{\mathrm{op}} \le b'$.

La catégorie A_T *est abélienne et* R*-linéaire.* □

Cette construction a les propriétés suivantes :

Théorème II.30. (O.C. [SCNM] §2.2, théorème 2.5 et §2.4, théorème 2.10.) –
(i) *Soit* $T : D \to A_R$ *une représentation d'un carquois* D *dans la catégorie* A_R *des* R*-modules sur un anneau* R *(ou plus généralement dans une catégorie abélienne* R*-linéaire* A_R*).*

Alors la représentation T *se factorise canoniquement à travers la catégorie abélienne* R*-linéaire* $A_T = \mathcal{C}_T^{\mathrm{eff}}$ *associée à sa théorie* $\mathbb{T}$ *en le composé d'une représentation*

$$D \longrightarrow A_T$$

et d'un foncteur R*-linéaire, exact et fidèle*

$$A_T \longrightarrow A_R.$$

De plus, cette factorisation est universelle relativement à toutes les factorisations à travers des catégories abéliennes R*-linéaires* A *et des foncteurs* R*-linéaires, exacts et fidèles* $A \to A_R$.

(ii) *Soient* $T, T' : D \rightrightarrows A_R$ *deux telles représentations d'un carquois* D *dans la même catégorie* A_R.

Alors les deux catégories abéliennes R*-linéaires* A_T *et* $A_{T'}$ *munies des représentations* $D \to A_T$ *et* $D \to A_{T'}$ *sont équivalentes si et seulement si les deux théories régulières* $\mathbb{T}$ *et* $\mathbb{T}'$ *de* T *et* T' *se confondent.*

(iii) *Soient* $T : D \to A_R$ *et* $T' : D' \to A_{R'}$ *deux représentations de deux carquois* D *et* D' *dans deux catégories de* R*-modules et* R'*-modules (ou plus généralement deux catégories abéliennes* R*-linéaire et* R'*-linéaire).*

Alors les deux catégories abéliennes A_T *et* $A_{T'}$ *sont équivalentes si et seulement si les deux théories régulières* $\mathbb{T}$ *et* $\mathbb{T}'$ *de* T *et* T' *sont équivalentes au sens de Morita, c'est-à-dire ont des topos classifiants équivalents.* □

Ce théorème a les conséquences suivantes pour les motifs :

Corollaire II.31. (O.C. [SCNM] Abstract ; voir aussi [CSMN] §I.3, corollaire I.13.) – *Soit D un carquois défini à partir de la catégorie des schémas de type fini sur un corps de base K.*

(i) *Soit T une représentation de D dans la catégorie des espaces vectoriels sur $\mathbb{Q}$ qui est induite par un foncteur cohomologique à coefficients de caractéristique* 0 *(Betti si $K \subseteq \mathbb{C}$, De Rham si* $\mathrm{car}\,(K) = 0$, *ℓ-adique si $\ell \neq \mathrm{car}\,(K)$, p-adique si $p = \mathrm{car}\,(K), \ldots$).*

Alors T se factorise canoniquement et universellement à travers la catégorie abélienne $\mathbb{Q}$-linéaire A_T et le foncteur $\mathbb{Q}$-linéaire exact et fidèle $A_T \to \mathbb{Q}$-vect.

(ii) *Soit $\{T_i\}_{i \in I}$ une famille de telles représentations de D induites par différents foncteurs cohomologiques de caractéristique* 0*.*

Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

(1) *Il existe une représentation $D \to \mathcal{M}$ de D dans une catégorie abélienne $\mathbb{Q}$-linéaire $\mathcal{M}$ telle que chaque représentation $T_i : D \to \mathbb{Q}$-vect, $i \in I$, se factorise comme le composé de $D \to \mathcal{M}$ et d'un foncteur $\mathbb{Q}$-linéaire, exact et fidèle $\mathcal{M} \to \mathbb{Q}$-vect (qui dépend bien sûr de i).*

(2) *Les catégories abéliennes $\mathbb{Q}$-linéaires A_{T_i} munies des représentations $D \to A_{T_i}$, $i \in I$, sont toutes équivalentes.*

(3) *Les représentations T_i ont toutes la même théorie régulière associée.*

Remarque :

Autrement dit, la propriété (3) de (ii) est un critère nécessaire et suffisant pour qu'existe une catégorie des motifs (mixtes) au sens de Grothendieck. □

Pour terminer ce paragraphe et cette section II, on note enfin que l'existence des topos classifiants des théories géométriques définit une nouvelle typologie des théories mathématiques : elle amène en effet à classer les théories suivant les propriétés de leur topos classifiant.

Par exemple, une classe naturelle particulièrement importante est celle des théories de type préfaisceau.

Une autre classe importante est celle des théories atomiques bivalentes (qui, d'après la proposition I.22 du paragraphe I.5, sont complètes au sens du premier ordre). Elles comprennent le formalisme galoisien de Grothendieck mais permettent aussi de classifier des théories linéaires, si bien que la dichotomie entre catégories galoisiennes et catégories tannakiennes est absorbée dans la notion générale de théorie atomique bivalente.

Du point de vue des topos classifiants, la distinction entre linéaire et non linéaire apparaît moins fondamentale. D'ailleurs, les théories linéaires admettent tout comme les théories non linéaires des topos classifiants qui ne sont pas en eux-mêmes des objets linéaires.

III. Les topos comme ponts

1 La notion d'équivalence de Morita

Il est facile de définir cette notion :

Définition III.1. –

Deux théories géométriques (du premier ordre) $\mathbb{T}$ et $\mathbb{T}'$ sont dites équivalentes au sens de Morita si et seulement si leurs topos classifiants $\mathcal{E}_{\mathbb{T}}$ et $\mathcal{E}'_{\mathbb{T}}$ sont équivalents, autrement dit si, pour tout topos $\mathcal{E}$, on a une équivalence entre catégories de modèles

$$\mathbb{T}\text{-}mod(\mathcal{E}) \cong \mathbb{T}'\text{-}mod(\mathcal{E})$$

qui est naturelle en $\mathcal{E}$.

Remarques :

(i) Cette notion généralise la notion classique d'équivalence de Morita entre deux anneaux R et R'. On montre en effet que la catégorie des R-modules ensemblistes est équivalente à celle des R'-modules ensemblistes si et seulement si le topos classifiant de la théorie des R-modules est équivalent à celui de la théorie des R'-modules. Cela résulte de la proposition II.13 puisque la théorie des modules sur n'importe quel anneau R est algébrique, donc de type préfaisceau.

(ii) Deux théories peuvent être équivalentes au sens de Morita sans être "bi-interprétables", autrement dit sans qu'un "dictionnaire" permette de passer de l'une à l'autre. Un exemple de telle situation est l'équivalence de Morita entre la théorie des groupes abéliens réticulés et celle des MV-algèbres parfaites qui relève au niveau des topos classifiants l'équivalence de Di Nola-Lettieri entre leurs catégories de modèles ensemblistes. Voir le théorème 8.3 de [LAG]. □

Plus généralement, on peut parler d'équivalence de Morita chaque fois que deux topos présentés par des sites $(\mathcal{C}, J)$, des théories $\mathbb{T}$, des "quantales" ou éventuellement d'autres données sont équivalents.

Tout topos présenté d'une certaine façon engendre une quantité illimitée d'autres présentations et donc d'équivalences de Morita. Cela résulte d'une série de faits généraux simples dont les premiers ont déjà été énoncés au début du paragraphe II.2 :

- le "lemme de comparaison" de Grothendieck (lemme II.11),
- la présentation par n'importe quelle famille génératrice d'objets du topos (proposition II.12),
- la présentation du topos classifiant d'une théorie de type préfaisceau par la catégorie de ses modèles ensemblistes finiment présentables (proposition II.13).

Une autre famille très importante et plus sophistiquée d'équivalences de Morita est celle des équivalences "galoisiennes" entre un topos $\mathcal{E}$ et le topos classifiant BG du groupe prodiscret G des automorphismes d'un point de $\mathcal{E}$.

Pour qu'une telle équivalence puisse exister, il faut que le topos $\mathcal{E}$ soit atomique bivalent.

Or on peut montrer que tout topos atomique peut être présenté par un site $(\mathcal{C}^{\mathrm{op}}, J)$ constitué de l'opposée $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ d'une catégorie $\mathcal{C}$ possédant la propriété d'amalgamation et de la topologie atomique J sur $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$. On est dans les conditions d'application du théorème II.23 qui dit en particulier que :

- le topos atomique $\mathcal{E}$ associé à $(\mathcal{C}^{\mathrm{op}}, J)$ est bivalent si et seulement si la catégorie $\mathcal{C}$ possède aussi la propriété de plongement conjoint (ce qui est automatique si $\mathcal{C}$ a un objet initial),
- dans ce cas, les points de ce topos sont les objets $\mathcal{C}$-homogènes u de la catégorie $\mathrm{Ind}\,(\mathcal{C})$,
- étant donnés un tel point u et le groupe topologique prodiscret G de ses automorphismes, le foncteur fibre associé à u définit une équivalence
$$\mathcal{E} \xrightarrow{\sim} BG$$
si et seulement si u est aussi universel et ultrahomogène.

Comme on l'a déjà noté, ce type d'équivalences de Morita recouvre la théorie de Galois des extensions finies séparables de corps et le formalisme des catégories galoisiennes de Grothendieck mais s'applique aussi dans bien d'autres situations classiques.

Il convient de remarquer que même des types d'équivalences de Morita beaucoup plus élémentaires, comme celles induites par le lemme de comparaison de Grothendieck, peuvent être exploitées pour obtenir des résultats tout à fait non triviaux, voire inattendus et inaccessibles par d'autres voies.

Par exemple, toutes les dualités de type de Stone connues en topologie constructive et un grand nombre de nouvelles dualités ont pu être retrouvées ou découvertes en associant des topos à des ensembles ordonnés considérés comme des catégories munies de différentes topologies que l'on peut définir, en appliquant le lemme de comparaison de Grothendieck à ces topos avec divers choix de familles séparantes et en fonctorialisant les équivalences obtenues dans un sens covariant ou contravariant. On renvoie pour plus de précisions au manuscrit du livre [TASD] et à l'article [PDPS].

Une autre famille d'exemples est donnée dans les articles [ME], [LAG] et [GTL] qui relèvent au niveau des topos les équivalences de Mundici et de Di Nola-Lettieri entre groupes abéliens réticulés et MV-algèbres, construisent de nouvelles équivalences et en déduisent des conséquences concrètes qui n'étaient pas connues auparavant.

2 Comment exploiter une équivalence de Morita : le choix d'invariants et leur double calcul

Supposons que l'on soit amené à considérer une équivalence de Morita, c'est-à-dire une équivalence de catégories
$$\mathcal{E} \cong \mathcal{E}'$$
entre deux topos $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ associés à des sites $(\mathcal{C}, J)$, $(\mathcal{C}', J')$ ou théories $\mathbb{T}, \mathbb{T}'$ différents.

Notons au passage que, selon l'expérience pratique accumulée jusqu'à présent, de telles équivalences de Morita résultent le plus souvent de théorèmes généraux tels que ceux rappelés au paragraphe précédent.

Alors l'équivalence de Morita considérée $\mathcal{E} \cong \mathcal{E}'$ peut être exploitée en choisissant des invariants des topos et en calculant, caractérisant ou exprimant ces invariants en termes des sites ou théories de présentation de $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$.

C'est dans ce calcul, cette caractérisation ou cette expression des invariants considérés en termes des sites ou théories de définition, plus souvent que dans l'équivalence de Morita elle-même, que réside en général la partie du travail techniquement la plus difficile et la plus profonde, souvent subtile et créative au sens qu'elle amène à introduire de nouvelles notions et à trouver des résultats dont la plupart sont complètement inattendus et auraient été impossibles à imaginer autrement.

Ces résultats ou ces nouvelles notions sont concrets au sens qu'ils sont écrits dans les langages des sites ou théories de définition et que les topos qui ont servi à relier ces sites ou théories n'apparaissent plus dans leur formulation.

Donnons quelques exemples de tels résultats qui sont des conséquences immédiates de certaines caractérisations d'invariants des topos données dans les parties I et II.

Corollaire III.2. (O.C.) –

Soit $\mathbb{T}$ une théorie géométrique de type préfaisceau, et soit $\mathcal{C}$ une catégorie dont le topos des préfaisceaux associé $\mathcal{E}_{\mathcal{C}}$ est équivalent au topos classifiant $\mathcal{E}_{\mathbb{T}}$ de $\mathbb{T}$. Alors

(i) *La théorie $\mathbb{T}$ vérifie la loi du tiers exclu si et seulement si la catégorie $\mathcal{C}$ est un groupoïde.*

(ii) *La théorie $\mathbb{T}$ est complète au sens géométrique si et seulement si tous objets a et b de $\mathcal{C}$ sont reliés par au moins deux flèches $a \to b$ et $b \to a$.*

Remarques :

(i) D'après la proposition II.13, on peut prendre en particulier pour $\mathcal{C}$ la catégorie opposée de celle des modèles ensemblistes finiment présentables de $\mathbb{T}$.

(ii) L'équivalence de (i) [resp. (ii)] résulte de la double caractérisation de la propriété invariante d'un topos $\mathcal{E}$ d'être Booléen [resp. bivalent] donnée

- dans la proposition I.19(ii) [resp. I.19(i)] du paragraphe I.5 lorsque $\mathcal{E}$ est le topos classifiant $\mathcal{E}_{\mathbb{T}}$ d'une théorie géométrique $\mathbb{T}$,
- dans le corollaire II.17(ii) [resp. II.17(i)] du paragraphe II.2 lorsque $\mathcal{E}$ est le topos $\mathcal{E}_{\mathcal{C}}$ des préfaisceaux sur une catégorie $\mathcal{C}$. □

D'après la proposition I.22 du paragraphe I.5 combinée avec le théorème II.23 du paragraphe II.2, on a aussi :

Corollaire III.3. (O.C.) –

Soient $\mathcal{C}$ une catégorie qui possède la propriété d'amalgamation et $\mathcal{E} = \mathcal{E}_{\mathcal{C}^{\mathrm{op}},J}$ le topos associé au site $(\mathcal{C}^{\mathrm{op}}, J)$ constitué de la catégorie $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ opposée de $\mathcal{C}$ et de la topologie atomique J de $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$.

Alors, pour toute théorie géométrique $\mathbb{T}$ dont le topos classifiant $\mathcal{E}_{\mathbb{T}}$ est équivalent à $\mathcal{E}$, la théorie $\mathbb{T}$ est complète au sens du premier ordre si et seulement si la catégorie $\mathcal{C}$ possède la propriété de plongement conjoint.

Remarque :

Cette fois le topos $\mathcal{E}$ associé à $(\mathcal{C}^{\mathrm{op}}, J)$ est automatiquement atomique et la propriété invariante considérée pour établir l'équivalence de l'énoncé est à nouveau celle d'être bivalent. □

Comme autre exemple, citons aussi deux résultats qui proviennent d'un double calcul d'objets invariants associés à un topos classifiant :

Théorème III.4. (O.C. [UMD] §3.) –

Soit $\mathbb{T}$ une théorie de type préfaisceau.

Alors :

(i) *Les modèles ensemblistes finiment présentables de $\mathbb{T}$ (au sens de la définition* I.23(i) *du paragraphe* I.5*) sont les modèles ensemblistes de $\mathbb{T}$ présentés par des formules (au sens de la définition* I.23(ii)*).*

(ii) *Les propriétés de familles finies $x_1, \ldots, x_n$ d'éléments des modèles ensemblistes finiment présentables de $\mathbb{T}$ qui sont préservées par les homomorphismes de ces modèles sont les propriétés définissables par des formules.*

Remarques :

(i) Pour (i), l'invariant considéré est la catégorie des objets irréductibles du topos classifiant $\mathcal{E}_{\mathbb{T}}$ de $\mathbb{T}$.

(ii) Pour (ii), l'invariant considéré est l'ensemble ordonné des sous-objets du modèle universel $M_{\mathbb{T}}$ de $\mathbb{T}$ dans son topos classifiant $\mathcal{E}_{\mathbb{T}}$.

(iii) Ce théorème exprime la nécessité des conditions (2) et (3) du théorème I.24 du paragraphe I.5. $\square$

3 La dualité entre réel et imaginaire

Dans la pratique, la mise en œuvre de la technique des "topos comme ponts" s'opère souvent de la manière suivante :

(1) On part d'une équivalence, ou d'une dualité, ou d'une correspondance relativement élémentaire dans le monde "réel" des théories mathématiques concrètes et de leurs modèles ensemblistes.

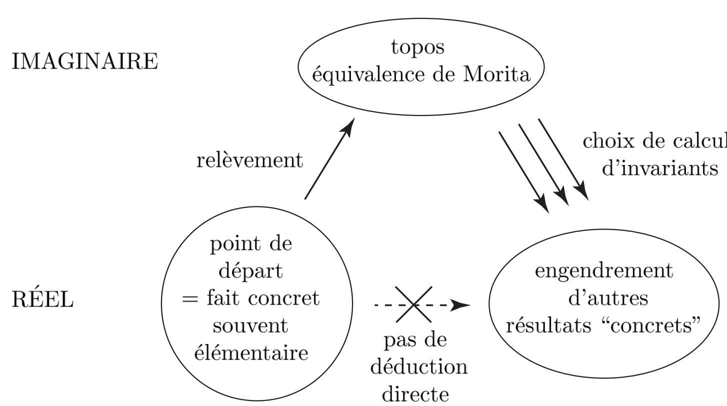
(2) On relève cette équivalence ou dualité ou correspondance dans le monde "imaginaire" des topos en une équivalence de Morita

$$\mathcal{E} \cong \mathcal{E}',$$

ce qui signifie généralement que l'équivalence dont on est parti se déduit de $\mathcal{E} \cong \mathcal{E}'$ par choix d'un certain invariant, par exemple celui défini par les ensembles de classes d'isomorphie des points des topos.

(3) On considère d'autres invariants de topos et on les calcule ou exprime dans les termes des sites ou théories de présentation de $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$, obtenant ainsi d'autres équivalences, dualités ou correspondances concrètes. Il s'avère que celles-ci sont souvent inattendues et, en général, ne peuvent se déduire directement de l'équivalence concrète dont on est parti.

Ainsi, on peut schématiser cette façon de mettre en œuvre la technique des "topos comme ponts" sous la forme d'une montée suivie d'une redescente entre deux niveaux, le niveau "réel" des mathématiques concrètes et le niveau "imaginaire" des topos :



Partant d'un topos ou d'une équivalence de Morita, le calcul ou l'expression en termes de sites ou de théories de présentation de tel ou tel invariant est souvent techniquement difficile mais faisable.

En revanche, remonter dans l'autre sens d'un résultat mathématique très sophistiqué attendu à une équivalence de Morita qui pourrait l'engendrer est en général irréalisable directement.

Par exemple, il n'est pas interdit de penser que la correspondance de Langlands ou le principe de fonctorialité – qui consistent en des liens conjecturés entre des théories très différentes (théorie de Galois et théorie automorphe d'une part, théories automorphes sur différents groupes réductifs d'autre part) – pourraient résulter d'équivalences de Morita ou de morphismes de topos par des calculs d'invariants. Il n'est même pas exclu qu'ils proviennent d'équivalences de Morita ou de morphismes de topos relativement simples, leur caractère extrêmement sophistiqué et profond pouvant fort bien résulter de la profondeur technique de certains calculs d'invariants.

Cela signifie que, si l'on rêve d'aborder ces problèmes avec la théorie des "topos comme ponts", il ne faut pas chercher à les attaquer directement mais à définir de "bons" topos susceptibles d'incarner des parties essentielles du contenu de la théorie des représentations automorphes.

Une problématique liée à celle du programme de Langlands mais différente est la problématique des motifs.

On a déjà vu dans le théorème II.30 et le corollaire II.31 comment la construction des catégories syntactiques s'applique à la question de l'existence de catégories de motifs mixtes au sens de Grothendieck à travers lesquelles se factoriseraient en particulier les différents foncteurs de cohomologie ℓ-adique $H^\bullet(\bullet, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$.

Dans la situation du corollaire II.31 d'un carquois D défini à partir de la catégorie des schémas de type fini sur un corps de base K et de représentations

$$T_\ell : D \to \overline{\mathbb{Q}}_\ell\text{-vect}$$

induites par les foncteurs de cohomologie ℓ-adique, $\ell \neq \mathrm{car}\,(K)$, ou éventuellement p-adique si $\ell = p = \mathrm{car}\,(K)$, est également posée la question de "l'indépendance de ℓ" :

- Pour tout objet d du carquois D, la dimension sur $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ de l'espace vectoriel $T_\ell(d)$ est-elle indépendante de ℓ ?
- Plus généralement, pour toute combinaison $\mathbb{Q}$-linéaire

  $$f : d \to d'$$

  de composées de flèches de d, la dimension sur $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ de

  $$\mathrm{Ker}\,(T_\ell(f) : T_\ell(d) \to T_\ell(d'))$$

  est-elle indépendante de ℓ ?

La difficulté de cette question provient en particulier de ce que les corps de coefficients $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ des foncteurs cohomologiques T_ℓ sont différents les uns des autres : l'axiome du choix permet certes d'affirmer qu'il existe des isomorphismes entre eux mais ces isomorphismes ne sont pas constructibles et ils ne peuvent pas respecter les topologies naturelles des $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$.

Pour tenter de surmonter cette difficulté, on peut rechercher une approche fondée sur le théorème II.23 :

Question III.5. (O.C. [MT] ; voir aussi [CSMN] question III.15.) –

On considère comme ci-dessus un carquois D de schémas de type fini sur un corps de base K et une collection de représentations

$$T_\ell : D \to \overline{\mathbb{Q}}_\ell\text{-}vect$$

induites par les foncteurs de cohomologie ℓ-adique ou éventuellement p-adique.

On voudrait que :

(i) *Les T_ℓ apparaissent comme des modèles ensemblistes d'une même théorie géométrique $\mathbb{T}$ qui serait atomique bivalente et donc complète.*

(ii) *Les sous-objets finiment engendrés des T_ℓ, c'est-à-dire les collections de sous-espaces vectoriels*

$$S(d) \subset T(d), \quad d \in \mathrm{Ob}(D),$$

sur un sous-corps de $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ finiment engendré sur $\mathbb{Q}$, qui sont envoyés les uns dans les autres par les flèches de D et qui sont globalement engendrés par un nombre fini d'éléments, apparaissent comme les modèles ensemblistes finiment présentables d'une théorie de type préfaisceau $\mathbb{S}$.

(iii) *Le topos classifiant $\mathcal{E}_\mathbb{T}$ de $\mathbb{T}$ soit de la forme*

$$\mathcal{E}_\mathbb{T} \cong \mathcal{E}_{\mathcal{C}^{\mathrm{op}},J}$$

où $\mathcal{C}$ désigne la catégorie des modèles ensemblistes finiment présentables de la théorie de type préfaisceau $\mathbb{S}$ et J désigne la topologie atomique sur la catégorie $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ opposée de $\mathcal{C}$.

Remarque :

Ainsi, $\mathbb{T}$ serait une théorie quotient de $\mathbb{S}$ et les modèles ensemblistes de $\mathbb{T}$ seraient les modèles ensemblistes $\mathcal{C}$-homogènes de $\mathbb{S}$. En particulier, les T_ℓ seraient des modèles $\mathcal{C}$-homogènes de $\mathbb{S}$. □

Comme la théorie $\mathbb{T}$ serait complète au sens du premier ordre, une réponse positive à cette question impliquerait toutes les propriétés d'indépendance de ℓ attendues.

Chaque représentation $T_\ell : D \to \overline{\mathbb{Q}}_\ell$-vect permet de définir une théorie de type préfaisceau $\mathbb{S}_\ell$ puis une théorie géométrique atomique bivalente $\mathbb{T}_\ell$ quotient de $\mathbb{S}_\ell$ qui sont des candidats pour répondre à la question posée :

Définition III.6. (O.C. [MT] §5.1 et 5.2 ; voir aussi [CSMN] définition III.18.) –

Partons de l'une des représentations considérées dans la question III.5 *ci-dessus*

$$T_\ell : D \to \overline{\mathbb{Q}}_\ell\text{-vect}.$$

(i) *Soit Σ la "signature de base" qui a*

- *une sorte pour le corps de coefficients k et pour chaque objet d de D,*
- *des symboles de fonctions pour la structure d'anneau de k et la structure k-linéaire de chaque autre sorte,*
- *un symbole de fonction pour chaque flèche de D,*
- *des symboles de relations $= 0$ et $\neq 0$ dans chaque sorte.*

(ii) *Soit $\mathbb{I}_\ell$ la "théorie de base" de signature Σ qui a pour axiomes*

- *les séquents qui assurent que k est un corps de caractéristique 0 et les autres sortes des k-espaces vectoriels,*
- *les séquents qui définissent les relations $\neq 0$,*
- *les séquents entre formules φ, ψ de conjonctions finitaires d'égalités entre termes*

$$\varphi \vdash_{\vec{x}} \psi$$

qui sont vérifiés dans T_ℓ.

(iii) *Soit* Σ' *la signature déduite de* Σ *en ajoutant un symbole de relation*

$$R_S$$

pour tout contexte $\vec{x}$ *(modulo renommation des variables) et tout sous-ensemble* S *de l'ensemble des termes en* $\vec{x}$*.*

(iv) *Soit* $\mathbb{S}_\ell$ *la théorie de signature* Σ' *déduite de* $\mathbb{I}_\ell$ *en ajoutant*

- *les axiomes qui donnent à chaque relation* R_S *le sens que les termes dans* S *sont* 0 *et les termes dans le complémentaire de* S *sont* $\neq 0$,
- *les axiomes dans tous les contextes* $\vec{x}$ *qui assurent que la disjonction* $\bigvee\limits_S R_S(\vec{x})$ *est démontrable.* □

Proposition III.7. (O.C. [MT] §5.2 et 5.3 ; voir aussi [CSMN] proposition III.19.) –

(i) *Pour tout indice* ℓ*, la théorie géométrique* $\mathbb{S}_\ell$ *associée ci-dessus à la représentation* $T_\ell : D \to \overline{\mathbb{Q}}_\ell$-vect *est de type préfaisceau.*

(ii) *La catégorie* $\mathcal{C}_\ell$ *des modèles ensemblistes finiment présentables de* $\mathbb{S}_\ell$ *a un objet initial et possède la propriété d'amalgamation donc aussi la propriété de plongement conjoint.*
Ses flèches sont des monomorphismes.

(iii) *Le topos* $\mathcal{E}_{\mathcal{C}_\ell^{\mathrm{op}}, J_\ell}$ *des faisceaux sur la catégorie opposée* $\mathcal{C}_\ell^{\mathrm{op}}$ *munie de la topologie atomique* J_ℓ *est donc un sous-topos atomique bivalent du topos classifiant* $\mathcal{E}_{\mathcal{C}_\ell^{\mathrm{op}}}$ *de* $\mathbb{S}_\ell$*, et il est le topos classifiant d'une unique théorie géométrique* $\mathbb{T}_\ell$ *quotient de* $\mathbb{S}_\ell$*.*
Les axiomes qu'il faut ajouter à $\mathbb{S}_\ell$ *pour définir* $\mathbb{T}_\ell$ *sont explicitables.* □

La question III.5 prend donc maintenant la forme beaucoup plus précise suivante :

Question III.8. (O.C. [MT] ; voir aussi [CSMN] question III.21.) –

(i) *Pour tout indice* ℓ*, la représentation cohomologique*

$$T_\ell : D \to \overline{\mathbb{Q}}_\ell\text{-vect}$$

est-elle un modèle ensembliste de $\mathbb{T}_\ell$ *ou, ce qui revient au même, un modèle* $\mathcal{C}_\ell$*-homogène de* $\mathbb{S}_\ell$ *?*

(ii) *Les théories* $\mathbb{S}_\ell$ *sont-elles indépendantes de* ℓ *?*

Remarques :

(i) Ainsi, une réponse positive à ces deux questions impliquerait toutes les propriétés d'indépendance de ℓ attendues.

(ii) La question (i) ne concerne que chaque représentation cohomologique T_ℓ considérée isolément.

Comme les axiomes de la théorie $\mathbb{T}_\ell$ peuvent être rendus explicites, cette question prend une forme très concrète.

On vérifie que les axiomes de $\mathbb{T}_\ell$ impliquent les propriétés d'exactitude usuelles des foncteurs cohomologiques. On peut donc les considérer comme un raffinement de ces propriétés d'exactitude. On renvoie pour plus de précisions au théorème 6.4 de [MT] §6.2 ou au corollaire III.22 de [CSMN]. □

Si la réponse à la double question III.8 était positive, elle ferait apparaître les foncteurs cohomologiques

$$T_\ell : D \to \overline{\mathbb{Q}}_\ell\text{-vect}$$

comme des points d'un même "objet imaginaire", le topos atomique bivalent $\mathcal{E}_{\mathbb{T}}$ classifiant la théorie complète $\mathbb{T} = \mathbb{T}_\ell$, $\forall\, \ell$, et aussi comme des limites inductives $\mathcal{C}$-homogènes des "objets réels" que sont leurs sous-objets finiment engendrés et la catégorie $\mathcal{C} = \mathcal{C}_\ell$, $\forall\, \ell$, qu'ils forment.

Références

[SGA1] "Revêtements étales et groupe fondamental" par A. Grothendieck, Springer LNM 224 (1971).

[SGA4] (Tome 1) "Théorie des topos" par A. Grothendieck et J.-L. Verdier, Springer LNM 269 (1972) ;
(tome 2) "Théorie des topos et cohomologie étale des schémas" par A. Grothendieck, J.-L. Verdier et B. Saint-Donat, Springer LNM 270 (1972) ;
(tome 3) "Théorie des topos et cohomologie étale des schémas" par A. Grothendieck, M. Artin et P. Deligne, Springer LNM 305 (1972).

[SGA5] "Cohomologie ℓ-adique et fonctions L" dirigé par A. Grothendieck, Springer LNM 589 (1977).

[AS] "The arithmetic site" par A. Connes et C. Consani, Comptes Rendus Mathématiques de l'Académie des Sciences vol. 352 (12), p. 971-975 (2014).

[AT] "Atomic toposes" par M. Barr et R. Diaconescu, Journal of pure and applied Algebra 17, p. 1-24 (1980).

[ATCC] "Atomic toposes and countable categoricity" par O. Caramello, Applied categorical structures 20(4), p. 379-391 (2012).

[CA] "Categories, allegories" par P. Freyd et A. Scedrov, Mathematical library Volume 39, North-Holland (1990).

[CFA] "Comptage de faisceaux ℓ-adiques" par P. Deligne, Astérisque 369, p. 285-312 (2015).

[CSCT] "Classifying spaces and classifying topoi" par I. Moerdijk, Springer LNM 1616 (1995).

[CSMN] 'Catégories syntactiques pour les motifs de Nori" par L. Lafforgue, notes de cours de l'IHES, prépublication M/15/26 (2015).

[CT] "Cyclic theories" par O. Caramello et N. Wentzlaff, Applied Categorical Structures (2016).

[CTGL] "A characterization theorem for geometric logic" par O. Caramello, Annals of pure and applied logic 162, p. 318-321 (2011).

[DCT] "De Morgan classifying toposes" par O. Caramello, Advances in Math. 222(6), p. 2117-2144 (2009).

[DLTF] "De Morgan's law and the theory of fields" par O. Caramello et P. Johnstone, Advances in Math. 222(6), p. 2145-2152 (2009).

[EFTP] "Extensions of flat functors and theories of presheaf type" par O. Caramello, arXiv :1404.4610 (2014), à paraître comme partie du livre [TST].

[EH] "Etale homotopy" par M. Artin et B. Mazur, Springer LNM 100 (1969).

[FCTP] "Fraïssé's construction from a topos-theoretic perspective" par O. Caramello, Logica universalis 8, p. 261-281 (2014).

[FLRF] "Formule de Lefschetz et rationalité des fonctions L" par A. Grothendieck, Séminaire Bourbaki, exposé 279 (décembre 1964).

[FOCL] "First-order categorical logic" par M. Makkai et G. Reyes, Springer LNM 611 (1977).

[GAS] "Geometry of the arithmetic site" par A. Connes et C. Consani, Advances in Mathematics, vol. 291 (2016).

[GSS] "Geometry of the scaling site" par A. Connes et C. Consani, arXiv :1603.03191 (2016).

[GTB] "Grothendieck toposes as unifying 'bridges' in Mathematics" par O. Caramello, Mémoire pour l'obtention de l'habilitation à diriger des recherches", disponible à l'adresse `http://www.oliviacaramello.com/Unification/HDROliviaCaramello.pdf` (2016).

[GTL] "On the geometric theory of local MV-algebras" par O. Caramello et A.C. Russo, arXiv :1602.03867 (2016).

[HTT] "Higher Topos Theory" par J. Lurie, Princeton University Press (2009).

[LAG] "Lattice-ordered abelian groups and perfect MV-algebras : a topos-theoretic perspective" par O. Caramello et A.C. Russo, arXiv :1409.4730 (2014), à paraître dans le Bulletin of symbolic logic.

[LPK] "Lokal Praesentierbare Kategorien" par P. Gabriel et F. Ulmer, Springer LNM 221 (1971).

[LT] "Lattices of theories" par O. Caramello, arXiv :0905.0299 (2009), à paraître comme partie du livre [TST].

[ME] "The Morita-equivalence between MV-algebras and lattice-ordered abelian groups with strong unit" par O. Caramello et A.C. Russo, Journal of Algebra 422, p. 752-787 (2015).

[MT] "Motivic toposes" par O. Caramello, arXiv :1507.06271 (2015).

[NIRF] "The number of two-dimensional irreducible representations of the fundamental group of a curve over a finite field" par V. Drinfeld, Funktsional. Anal. i Prilazhen. 15(4), p. 75-76 (1981).

[PDPS] "Priestley-type dualities for partially ordered structures" par O. Caramello, à paraître dans Annals of pure and applied logic.

[RS] "Récoltes et semailles : Réflexions et témoignages sur un passé de mathématicien" par A. Grothendieck, Université de Montpellier (1985).

[SCGI] "Site characterizations for geometric invariants of toposes" par O. Caramello, Theory and applications of categories 26(25), p. 710-728 (2012).

[SCNM] "Syntactic categories for Nori motives" par L. Barbieri-Viale, O. Caramello et L. Lafforgue, arXiv :1506.06113 (2015).

[SE] "Sketches of an elephant : A topos-theoretic compendium" par P. Johnstone, Clarendon Press, Oxford (2002).

[SGL] "Sheaves in Geometry and Logic" par S. Mac Lane et I. Moerdijk, Springer (1992).

[TASD] "A topos-theoretic approach to Stone-type dualities" par O. Caramello, arXiv :1103.3493 (2011).

[TASR] "Topos annelés et schémas relatifs" par Monique Hakim, Springer (1972).

[TGR] "Les topos de Grothendieck et les rôles qu'ils peuvent jouer en mathématiques" par O. Caramello et L. Lafforgue, notes d'un exposé donné le 1er avril 2016 au laboratoire Jean Leray de l'Université de Nantes (`http://www.math.sciences.univ-nantes.fr/fr/video/2000`), disponibles sur les sites des auteurs.

[TGT] "Topological Galois theory" par O. Caramello, arXiv :1301.0300 (2013), à paraître dans Advances in mathematics.

[TIL] "Topologies for intermediate logics" par O. Caramello, Mathematical logic quartely 60(4-5), p. 335-347 (2014).

[Tohoku] "Sur quelques points d'algèbre homologique" par A. Grothendieck, Tohoku Math. J., volume 9(3), p. 119-221 (1957).

[TQAA] "Toposes, quantales and C^* algebras in the atomic case" par S. Henry, arXiv :1311.3451 (2013).

[TST] "Theories, sites, toposes : Relating and studying mathematical theories through topos-theoretic bridges" par O. Caramello, à paraître à Oxford University Press.

[TTB] "Topos-theoretic background" par O. Caramello (2014), texte disponible sur le site de l'auteur, à paraître comme chapitres I et II du livre [TST].

[UMD] "Universal models and definability" par O. Caramello, Math. Proc. of the Cambridge Philosophical Society 152(2), p. 279-302 (2012).

[UMT] "The unification of mathematics via topos theory" par O. Caramello, arXiv :1006.3930 (2010).

[YRFF] "Yoneda representations of flat functors and classifying toposes" par O. Caramello, Theory and applications of categories 26(21), p. 538-553 (2012).